Lecture Notes in Mathematics

砂田利一・黒川信重 共編

数学レクチャーノート

基礎編 2

リーマン幾何学

加須栄篤著

培風館

数学レクチャーノート

編者のことば

これまで，数学のテキスト・参考書の類は数多く出版されてきた．それぞれ，特色のある内容が盛り込まれており，工夫もされている．しかし，学生の理解能力を勘案すると，専門書としては完璧であっても，通読するには決して容易とは思えない本も多かったのではないだろうか．

大学における実際の講義は，学生の理解を考慮に入れながら進められる．もっと言えば，教官と学生の間のコミュニケーションが陰に陽に存在するのである．本の形式では，著者から読者への一方通行となり，真の意味のコミュニケーションは不可能である．しかし，工夫さえすれば，講義の特色を本に生かすことができるだろう．

編者達の長年の夢は，講義と同じような臨場感あふれる本を作り出すことであった．すなわち，定義や定理の羅列ではなく，背景にある考え方や動機を書くことによって，講義と同じように数学の楽しさ面白さを前面に出すことが可能と考えたのである．すべてのジャンルに共通することであるが，本の面白さは，そのストーリーにより決まるといってよい．ストーリーに無理があれば，読者は途中で本を放り出すだろう．本シリーズでは，内容の正確さは当然のこととして，ストーリー性を重視することにより，臨場感のある講義形式のテキストを目指している。

読者は，このシリーズによって数学の基本的考え方を無理なく会得し，さらに進んだ数学を学ぶための動機を獲得できるであろう．

2001 年 春

砂田利一
黒川信重

A Brief Review

現代幾何学の行われる場は，リーマン多様体とよばれる「計量」をもつ「曲がった」空間である．「計量」とは，空間における「ものさし」であり，それを使って 2 点間の距離を測ることができる．さらに，直線の概念を最短線 (測地線) として拡張し，2 つの最短線のなす角度を測ったり，曲線に沿ってベクトルを「平行移動」することもできる．すなわち，ユークリッド幾何学において考察される幾何学的対象を，リーマン多様体の上で一般化することができるのである．一方，「曲がった」空間の「曲がり方」の度合い (曲率) まで，「計量」を使って測ることが可能である．曲率を使うと，ユークリッド幾何学における「三角形の内角の和は 2 直角」という定理が，ガウス・ボンネの定理として面目を一新する．

本書の主題は，まさにこの現代幾何学である．「曲がった」空間の数学的具体化である多様体の概念から出発し，合同変換の一般化である等長変換，平行移動を論ずる線形接続の理論を扱い，そして曲率の理論で終わる．線形代数と多変数の微分積分学の知識は仮定するが，おおむね self-contained になるように，注意深く書かれている．章立てからみると，ストーリーは簡素にみえるが，実は各節において多くの事柄が扱われ，類書に比べても豊富な内容をもっているといえよう．さらに，著者独自の視点から，題材の書き方の順序にも配慮がなされている．選ばれているトピックスや，数多くの例は，著者の幾何学への造詣の深さを物語っている．

幾何学は，数学内部の学問としてばかりではなく，物理学，工学などで広く応用されている．とくに，リーマン幾何学と相対性理論との関係は，直接的であるといってもよい．接続の理論は，工学的な問題と密接に関連している．この意味で，数学の研究者・教育者や学生のみならず，幾何学を学ぼうとする多方面の人々に最適な本といえよう．

東北大学　　砂田利一

はじめに

現代的な微分幾何学の幕開けは，1827年に発表されたGaussによる『曲面の研究』にあるといわれている．それに続いてRiemannは，1854年にゲッチンゲン大学において，『幾何学の基礎をなす仮定について』と題する講師就任講演を行ない，今日多様体とよばれている新しい空間の概念とガウスの曲面論の拡張を唱道した．リーマン幾何のはじまりである．

本書の目的は，微分幾何学への入門として，リーマン幾何の基礎的概念を解説することである．読者が，線形代数と多変数の微積分の基本的な事柄と，さらに多様体論の初歩を理解していることを仮定する．ただし多様体に関しては，必要な事柄を本文の最初に説明する．

さて本書の内容を簡単に説明しよう．まずリーマン多様体の二点間の最短経路の問題を考える．変分法を用いて，与えられた二点を結ぶ曲線の長さの下限を実現する曲線の満たすべきオイラー・ラグランジュの方程式として，測地線の方程式を導く．これが局所的にはクリストッフェルの記号を用いて記述されることをみる．また，リーマン多様体上の微積分の基礎となる積分公式を述べる．以上が第1章の内容である．

リーマン多様体において，曲線の長さ，測地線，領域の体積など等長変換で不変であるものが考察の対象となる．第2章において，ユークリッド空間，球面，双曲空間の等長変換を求める．次に，リーマン多様体の等長変換のなす群とその作用という視点から考察を進める．

クリストッフェルの記号によって，曲線に沿う平行移動という接空間をつなぐ規則が定まる．これによってベクトル場，さらに一般のテンソル場の微分法(共変微分)が多様体上に導入される．この視点から測地線を，その接ベクトルがそれ自身に沿う平行移動によって一定の方向にある曲線としてとらえる．また距離の幾何の視点に立って，リーマン多様体の測地線を局所最短線として理解する．これらが第3章のテーマである．

現代の微分幾何学におけるひとつの大きな流れは，曲率を中心に展開しているといっても過言ではない．これに関して，第3章において，ガウス・ボンネの定理を証明する．さらに第4章において，リーマン幾何の基本的概念，方法，結果をいくつか選んで解説し，その展開の入り口に案内する．

なお本文中には，その内容の理解を助けるだけではなく，内容を補足する目的でいくつかの練習問題を付けたので，解答を試みてほしい．

最後に，本書の執筆の機会を与えて下さった砂田利一先生，草稿に目を通して有益な助言をいただいた加藤信 氏，そして出版に関していろいろとお世話になった培風館編集部の岩田誠司氏に深く感謝の気持を表したい．

2001年5月

加須栄　篤

目　次

1章 リーマン多様体

1.1 多 様 体

本節では，微分可能多様体の定義からはじめ，接ベクトル，接空間，写像の微分，ベクトル場，1次微分形式，単位の分解などの基本的な事柄を説明する．

1.1.1 微分可能多様体

m 個の実数の組 $(x^1,\ldots,x^m)$ 全体からなるベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ において，標準内積

$$\langle u,v\rangle_0 = u^1v^1+\cdots+u^mv^m \quad (u=(u^1,\ldots,u^m),\ v=(v^1,\ldots,v^m)\in\mathbf{R}^m)$$

によって，各ベクトル v の長さ (ノルム)

$$\|v\|_0=\sqrt{\langle v,v\rangle_0}$$

が定まる．ここで正数 a に対して，

$$\mathbf{B}^m(a)=\{v\in\mathbf{R}^m \mid \|v\|_0<a\}, \qquad \mathbf{S}^{m-1}(a)=\{v\in\mathbf{R}^m \mid \|v\|_0=a\}$$

とおいて，$\mathbf{B}^m(a)$, $\mathbf{S}^{m-1}(a)$ をそれぞれ半径 a の m 次元**球体**，および $(m-1)$ 次元**球面**という．またとくに断らない限り，$k<m$ となる k に対して，$\mathbf{R}^k$ を $\mathbf{R}^m$ の部分空間

$$\mathbf{R}^k=\{(x^1,\ldots,x^k,0,\ldots,0)\in\mathbf{R}^m\}$$

と考える．

さて，ハウスドルフ位相空間 M において，M の各点が $\mathbf{R}^m$ の開集合と同相な近傍をもつとき，M を m 次元**位相多様体**という．また，M の開集合 U が，$\mathbf{R}^m$ の開集合 A と同相であるとき，U と U から A への同相写像 $\phi : U \to A$ の組 (U, ϕ) を M の**座標近傍**という．$\mathbf{R}^m$ の点 $\phi(p)\,(p \in U)$ の $\mathbf{R}^m$ における座標を $(x^1(p), \ldots, x^m(p))$ とすれば，各 x^i は U 上の実数値連続関数であって，これらの m 個の関数の組 $(x^1, \ldots, x^m)$ を座標近傍 (U, ϕ) における M の**局所座標系**，$(x^1(p), \ldots, x^m(p))$ を点 p の**局所座標**とよぶ．以下，しばしば座標近傍と局所座標系を組にして考えることにして，$(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ あるいは $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ と記す．

位相多様体 M において，二つの座標近傍 (U, ϕ) と (V, ψ) の共通部分が空集合ではないならば，$\mathbf{R}^m$ の開集合 $\phi(U \cap V)$ から $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi \circ \phi^{-1} :\ \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

が定まる．これを (U, ϕ) から (V, ψ) への**座標変換**という．ここで

$$(y^1, \ldots, y^m) = \psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^m)$$

とおくと，座標変換は $\mathbf{R}^m$ の開集合 $\phi(U \cap V)$ で定義された m 個の連続関数の組 $(y^1, \ldots, y^m)$ で表される．

定義 1.1 m 次元位相多様体 M が次の条件 (i), (ii) を満たすとき，C^∞ 級**微分可能多様体**，あるいは簡単に微分可能多様体という．

(i) ある座標近傍の族 $\{(U_i, \phi_i) \,|\, i \in I\}$ があって，この族は M を被覆する $(M = \bigcup_{i \in I} U_i)$.

(ii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ である任意の $i, j \in I$ に対して，その座標変換 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$: $\phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ は C^∞ 級**微分同相写像**である．

ここで，$\mathbf{R}^m$ の開集合 U から開集合 V への写像 $f : U \to V$ が全単射であり，f, f^{-1} ともに C^∞ 級微分可能であるとき，f を C^∞ 級微分同相写像とよぶ．そして，上の定義の座標近傍の族 $\{U_i \,|\, i \in I\}$ を微分可能多様体 M のアトラス (海図) という．さらに，座標近傍 (U, ϕ) に対して $U \cap U_i \neq \emptyset$ ならば，その座標変換

$$\phi \circ \phi_i^{-1} :\ \phi_i(U \cap U_i) \to \phi(U \cap U_i), \quad \phi_i \circ \phi^{-1} :\ \phi(U \cap U_i) \to \phi_i(U \cap U_i)$$

がそれぞれ C^∞ 級微分同相写像のとき，(U,ϕ) もアトラスの中に入れることができる．以後微分可能多様体を考え，その座標近傍というときには，このようなものを意味する．

▶ **例 1** $\mathbf{R}^m$ 自身その標準座標によって微分可能多様体となり，同じく $\mathbf{R}^m$ で表す．また $\mathbf{R}^m$ の開集合も自然に微分可能多様体になる．一般に，微分可能多様体 M の開集合も，M の座標近傍との共通部分を考えることにより自然に微分可能多様体になり，これを M の**開部分多様体**という． □

▶ **例 2** $\mathbf{R}^{m+1}$ の球面 $\mathbf{S}^m(a)$ を考える．($\mathbf{R}^{m+1}$ での相対位相に関する) $\mathbf{S}^m$ の開集合 $U_i^\pm$ $(i=1,\dots,m+1)$ を次のようにおく:

$$U_i^\pm = \{(x^1,\dots,x^i,\dots,x^{m+1}) \in \mathbf{S}^{m+1}(a) \mid x_i > 0\,(<0)\}.$$

次に，$U_i^\pm$ から $\mathbf{B}^m(a)$ への同相写像 $\phi_i^\pm$ を

$$\phi_i^\pm(x^1,\dots,x^{m+1}) = (x^1,\dots,x^{i-1},x^{i+1},\dots,x^{m+1})$$

によって定めると，各 $(U_i^\pm,\phi_i^\pm)$ は $\mathbf{S}^m(a)$ の座標近傍を与え，これらは $\mathbf{S}^m(a)$ を被覆する．また座標変換は C^∞ 級微分同相写像であることが確かめられ，このアトラスによって，$\mathbf{S}^m(a)$ は C^∞ 級微分可能多様体となる．以降同様に，$\mathbf{S}^m(a)$ によってこのアトラスによって定義される微分可能多様体を表す．なお，円周 $\mathbf{S}^1(a)$ の点を $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ と表すとき，定数 b に対して，θ $(b<\theta<b+2\pi)$ は $\mathbf{S}^1(a)\setminus\{(a\cos b, a\sin b)\}$ 上の局所座標である． □

次に，微分可能多様体の間の C^r 級**微分可能写像** $(0 \leqq r < \infty$ または $r=\infty)$ の定義を述べよう．まず，微分可能多様体 M において定義された連続関数が C^r 級微分可能であるとは，任意の点 p に対して，それを含む座標近傍 (U,ϕ) をとり，$\mathbf{R}^m$ の開集合 $\phi(U)$ 上の関数 $f\circ\phi^{-1}$ が C^r 級であるときをいう．これは座標近傍のとり方によらない．C^r 級関数全体は自然な加法とスカラー積によってベクトル空間になるが，これを $C^r(M)$ と記す．また，M から n 次元微分可能多様体 N への連続写像 f が C^r 級微分可能であるとは，任意の $h\in C^r(N)$ に対して，h の f による引き戻し

$$(f^*h)(p) = (h\circ f)(p) = h(f(p)) \qquad (p\in M)$$

が C^r 級であるときをいう．なお，M の座標近傍 (U,ϕ) と N の座標近傍

(V,ψ) に対して，$f(U) \subset V$ ならば，$\mathbf{R}^m$ の開集合 $\phi(U)$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(V)$ の中への写像 $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ が C^r 級である，と定義しても同じである．

さらに，多様体 M から多様体 N への写像 $f : M \to N$ が全単射であり，f, f^{-1} ともに C^r 級微分可能であるとき，f を C^r 級**微分同相写像**とよぶ．

なお，$\mathbf{R}$ の開区間から M への C^r 級写像を C^r 級**曲線**という．さらに，定義区間として閉区間や半閉区間を考えるときも多い．区間からの写像が，それを含むある開区間に C^r 級に拡張できるときに，その区間から M への C^r 級曲線とよぶことにする．また，区間から M への連続曲線が，定義されている区間の適当な細分があって，各部分区間において C^r 級の曲線となるとき，その曲線を，区分的に C^r 級の曲線とよぶ．

さて，M と N をそれぞれ m 次元および n 次元微分可能多様体とし，$\{(U_i,\phi_i)\,|\,i \in I\}$ と $\{(V_j,\psi_j)\,|\,j \in J\}$ をそれぞれ M と N のアトラスとする．このとき，直積空間 $M \times N$ には自然にアトラス $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\,|\,(i,j) \in I \times J\}$ が定まり，$(m+n)$ 次元微分可能多様体となる．これを M と N の**直積多様体** という．同様に，有限個の微分可能多様体の直積多様体も定めることができる．たとえば，円周 (1 次元球面) の m 個の直積多様体 $\mathbf{S}^1 \times \cdots \times \mathbf{S}^1$ を m 次元**トーラス**という．

ここで**部分多様体**の定義を述べよう．M を m 次元微分可能多様体とする．M の部分位相空間 L が M の k 次元部分多様体とは，L の任意の点 p に対して，p を含む M の座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ があって，

$$L \cap U = \{q \in U \mid x^{k+1}(q) = \cdots = x^m(q) = 0\}$$

となるときをいう．ただし $0 < k < n$ とする．さらに L が M の閉集合のとき，L を**閉部分多様体**という (ここで定義した部分多様体を，埋め込まれた部分多様体，あるいは正則部分多様体とよぶことも多い)．

ここで，$V = L \cap U$ および V の点 q に対して $\overline{\phi}(q) = (x^1(q), \ldots, x^k(q))$ とおくと，$(V, \overline{\phi})$ は L の座標近傍を与え，このようにして得られる座標近傍によって L は被覆される．これらは L のアトラスを与え，L は k 次元微分可能多様体となる．部分多様体の余次元 $(m-k)$ が 1 に等しいとき，L を M の**超曲面**という．

以後とくに断らない限り，多様体といえば C^∞ 級微分可能多様体を意味する

ことにする．

1.1.2 写像の微分

m 次元多様体 M の点 p に対して，0 を含むある開区間で定義された M の C^∞ 級曲線 c で，$c(0)=p$ となるものを考える．点 p の近傍で定義された C^∞ 級関数 f に対して，曲線 c に沿う ($t=0$ における) 方向微分を

$$v(f)=\frac{df(c(t))}{dt}(t=0)$$

によって定める．これは，次の性質 (i)–(iii) を満たす．点 p の近傍で定義された任意の C^∞ 級関数 f,g に対して，

(i) f と g が点 p のある近傍上で一致すれば，$v(f)=v(g)$,

(ii) $v(\alpha f+\beta g)=\alpha v(f)+\beta v(g)$ (α,β は定数),

(iii) $v(fg)=v(f)g(p)+f(p)v(g)$.

このような性質をもつ p の近傍上の C^∞ 級関数 f に実数 $v(f)$ を対応させる操作を，点 p での**接ベクトル**とよぶ．点 p での接ベクトル全体からなる集合を点 p での M の**接空間**といい，T_pM で表す．T_pM には自然に加法とスカラー積が定まり，ベクトル空間となる．

次に，上のような曲線 c に沿う方向微分 v を局所座標系を用いて表現してみる．まず p を含む座標近傍 $(U,\phi=(x^1,\dots,x^m))$ をとり，$c(t)$ の座標を $\phi(c(t))=(c^1(t),\dots,c^m(t))$ とおくとき，

$$\begin{aligned}v(f)&=\frac{d}{dt}f(c(t))(t=0)\\&=\frac{d}{dt}\,(f\circ\phi^{-1})(c^1(t),\dots,c^m(t))(t=0)\\&=\sum_{i=1}^m\frac{dc^i(t)}{dt}(t=0)\frac{\partial f\circ\phi^{-1}}{\partial x^i}(\phi(p))\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f)=\frac{\partial f\circ\phi^{-1}}{\partial x^i}(\phi(p))\qquad(i=1,\dots,m)$$

によって m 個の接ベクトル $\{(\partial/\partial x^1)_p,\dots,(\partial/\partial x^m)_p\}$ を定めると，これらは，T_pM のひとつの基底を与える．基底であることを確かめるには線形独立であることを示せばよい．そこで $\sum_{i=1}^m v^i(\partial/\partial x^i)_p=0$ $(v^1,\dots,v^m\in\mathbf{R})$ とすると，$f_j\circ\phi^{-1}(x^1,\dots,x^m)=x^j$ とおいて定義された U 上の C^∞ 級関数 f_j

$(j=1,\ldots,m)$ に対して，$\left(\sum_{i=1}^{m} v^i(\partial/\partial x^i)_p\right)(f_j)=v^j$ より，$v^1=\cdots=v^m=0$ が従う．この基底 $\{(\partial/\partial x^1)_p,\ldots,(\partial/\partial x^m)_p\}$ を局所座標系 $(x^1,\ldots,x^m)$ に関する**座標基底**という．

また，各接ベクトル $v\in T_pM$ に対して上のような C^∞ 級曲線 c をとるとき，c は点 p で v に**接する**といい，$c'(0)=v$ あるいは $\dfrac{dc}{dt}(t=0)$ と記す．ここで，$t=0$ がとくに意味があるわけではなく，C^∞ 級曲線 $c(t)$ は，パラメータの各値 t において接ベクトル $c'(t)\in T_{c(t)}M$ を定める．

たとえば $\mathbf{R}^m$ の場合，$(x^1,\ldots,x^m)$ をその標準座標とすれば，各点 p において $\{(\partial/\partial x^1)_p,\ldots,(\partial/\partial x^m)_p\}$ が $T_p\mathbf{R}^m$ の基底を与えるので，線形同形対応

$$v=\sum_{i=1}^{m} v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\in T_pM \iff (v^1,\ldots,v^m)\in\mathbf{R}^m$$

をとおして，C^∞ 級曲線 $c(t)=(c^1(t),\ldots,c^m(t))$ の接ベクトル $c'(t)$ は，(数)ベクトル $(dc^1(t)/dt,\ldots,dc^m(t)/dt)$ として理解できる．また，$\mathbf{R}^m$ の k 次元部分多様体 M の場合，T_pM は点 p をとおる M 内の C^∞ 級曲線の点 p での接ベクトルによって張られる $\mathbf{R}^m$ の k 次元線形部分空間と同一視できる．

一般に，m 次元 (実) ベクトル空間 V に対して，V^* によって V の双対空間，すなわち V から $\mathbf{R}$ への線形形式 (関数) 全体のなすベクトル空間を表す．V の基底 $\{e_1,\ldots,e_m\}$ を一つ選び，$\{e^1,\ldots,e^m\}$ をその双対基底，すなわち，$e^i(e_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,m)$ によって定まる V^* の基底とする．ここで δ_{ij} は，$i=j$ のとき $\delta_{ii}=1$，それ以外のとき $\delta_{ij}=0$ を表す記号で，**クロネッカーのデルタ**という．V の元 x に対して $x^i=e^i(x)$ $(i=1,\ldots,m)$ とおいて，$x=\sum_{i=1}^{m} x^i e_i$ と一意的に表すと，$(x^1,\ldots,x^m)$ は V 上の座標系を与える．このように V は自然に多様体となり，$\mathbf{R}^m$ と微分同相である．V の各点 x と任意のベクトル v に対して，直線 $c_v(t)=x+tv$ は $t=0$ で x をとおり，その接ベクトル ${c_v}'(0)$ と v を対応させることによって，T_xV は自然に V 自身と同一視される．V の部分多様体の接空間も V の部分線形空間と考える．

このように，幾何学における“ベクトル”という概念と解析学における“微分”という概念を結びつけることによって，多様体の幾何学と解析学が展開されるのである．

さて，m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像 $f:M\to N$

を考える．M の点 p での f の**微分** $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ を次のように定める．各 $v \in T_pM$ に対して，

$$df_p(v):\ h \to (df_p(v))(h) = v(f^*h).$$

ここで h は，点 $f(p)$ の近傍で定義された任意の C^∞ 級関数である．なお，微分 df を次のように定義しても同じである．各接ベクトル $v \in T_pM$ に対して，それに接する C^∞ 級曲線 c をとり，

$$df_p(v) \left(= df_p \left(\frac{dc}{dt}(t=0) \right) \right) = \frac{df(c(t))}{dt}(t=0)$$

と定める．このとき，df_p は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線形写像である．

次に，局所座標系に関する座標基底を用いた df の行列表示を求める．$f(U) \subset V$ となる M と N の座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$, $(V, \psi = (y^1, \ldots, y^n))$ を考える．簡単のため

$$f^i(x^1, \ldots, x^m) = y^i \circ f \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^m)$$

とおく．このとき合成関数の微分法により，

$$df_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)}. \tag{1.1}$$

したがって，各接ベクトル $v \in T_pM$ に対して，

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \qquad df_p(v) = \sum_{j=1}^n w^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)} \in T_{f(p)}N$$

とおくと，

$$w^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial x^i} v^i \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

という関係式が成り立つ．係数 $v^1, \ldots, v^m$ と $w^1, \ldots, w^n$ をそれぞれ列ベクトルの成分と考えると，この関係式は次のようになる:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

ここに現れた (n, m) 行列を，点 p における写像 $f : M \to N$ の**ヤコビ行列**とよび，$(Jf)_p$ と記す．ヤコビ行列 $(Jf)_p$ は，局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ と $(y^1, \ldots, y^n)$ を選ぶことによって決まる行列である．

次に，二つの写像の合成写像の微分を考えよう．f, g をそれぞれ多様体 L から M，M から N への C^∞ 級写像とする．このとき合成写像 $g \circ f : L \to N$ の微分 $d(g \circ f)$ は，連鎖律より f と g それぞれの微分 df と dg の合成 $dg \circ df$ と一致する．すなわち，

$$d(f \circ g)_p(v) = dg_{f(p)}(df_p(v)) \qquad (v \in T_pL,\ p \in L)$$

となる．これをヤコビ行列で表現すると，

$$(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p \qquad (\text{行列の積})$$

となる．ところで，(m 次元) 多様体 M の恒等写像を考えるとき，(1.1) は次の座標基底の変換則:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p \tag{1.2}$$

となることに注意する．

多様体 N の部分多様体 M の場合，包含写像 $\iota : M \to N$ の微分 $d\iota$ によって M の点 p での接空間 T_pM は T_pN の部分空間 $d\iota(T_pM)$ に線形同形である．この二つを同一視して，以後 T_pM を T_pN の線形部分空間とみなすことにしよう．

また，二つの多様体の直積 $M \times N$ を考えるとき，点 (p, q) での接空間 $T_{(p,q)}(M \times N)$ は部分多様体 $M \times \{q\}$ と $\{p\} \times N$ のそれぞれの接空間のベクトル空間としての直和であるが，$T_{(p,q)}(M \times \{q\}) \simeq T_pM$ と $T_{(p,q)}(\{p\} \times N) \simeq T_qN$ として，自然に $T_{(p,q)}(M \times N)$ は T_pM と T_qN のベクトル空間としての直和とみなすことができる．すなわち，

$$T_{(p,q)}(M \times N) \simeq T_pM + T_qN \qquad ((p, q) \in M \times N).$$

さて，多様体 M 上の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の場合を考えよう．($T_t\mathbf{R} = \mathbf{R}$ ($t \in \mathbf{R}$) と考えて) f の微分 df_p ($p \in M$) は，接空間 T_pM 上の線形関数となり，T_pM の双対空間の元 (1 次形式) を定める．T_pM の双対空間を T_p^*M と表し，多様体 M の点 p での**余接空間**とよぶ．関数 f は，M 全体で定義されている必要はないことは明らかであろう．すなわち，開集合 U 上の C^∞ 級関数 f に対して，その微分 df_p ($p \in U$) が T_p^*M の元を定めるのである．

ここで座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ において考える．各座標関数 x^i は，T_p^*M ($p \in U$) の元 $(dx^i)_p$ を定め，$\{(dx^1)_p, \ldots, (dx^m)_p\}$ は，T_pM の座標基

底 $\{(\partial/\partial x^1)_p, \ldots, (\partial/\partial x^m)_p\}$ の双対基底を与える．すなわち

$$(dx^i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

したがって $f \in C^\infty(U)$ に対して，df_p を $(dx^1)_p, \ldots, (dx^m)_p$ の一次結合として一意的に表すと，

$$df_p = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f)(dx^i)_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}(\phi(p))(dx^i)_p$$

となる．混乱のおそれがないと思われるときには，U と $\phi(U)$ を同一視して，$f \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^m)$ を $f(x^1, \ldots, x^m)$ と記し，

$$df_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(dx^i)_p$$

と表す．C^∞ 級関数 f が点 p において，極値 (極大値あるいは極小値) をとれば，微分 df_p は消えていること $(df_p = 0)$ に注意する．逆は一般には正しくはないが，大切な事実である．

▶ **例 3** 図 1.1 のように xyz 空間 $\mathbf{R}^3$ において，xy 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の円周を x 軸を中心に回転してできる曲面 M と z 座標を M に制限して得られる関数 h を考える．四点 p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ において，h の微分は消える． □

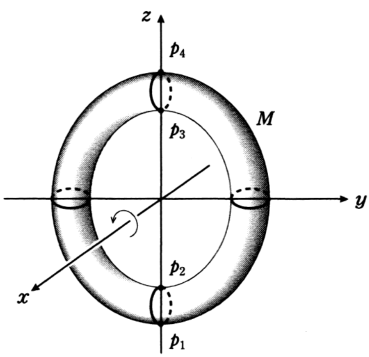


図 1.1

一般に，m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像 $f : M \to N$ に対して，点 p での微分 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が上への線形写像であるとき，p

を f の**正則点**とよび，上への線形写像でないとき，p を f の**臨界点**，さらにその移される点 $f(p)$ を f の**臨界値**という．ここで，写像 f の像 $f(M)$ に含まれる点 q に対して $L = \{p \in M \mid f(p) = q\}$ とおいたとき，$m > n$ で点 q が f の臨界値でない，すなわち L の各点が f の正則点のとき，L は M の $(m-n)$ 次元部分多様体となり，接空間 T_pL $(p \in L)$ は df_p の核 $\{v \in T_pM \mid df_p(v) = 0\}$ である．なぜならば，陰関数定理 (たとえば [3, 4, 7] 参照) によれば，次が成り立つからである．

“各点 $p \in M$ と N の点 $q = f(p)$ の座標近傍 $(U, (y^1, \ldots, y^n))$ に対して p の座標近傍 $(W, (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m))$ が存在して，$f(W) \subset U$ であり，さらに f の局所座標表示 $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ が $y^i = x^i$ となるようにできる．したがって $L \cap W$ が L の座標近傍となり，$(x^{n+1}, \ldots, x^m)$ を $L \cap W$ に制限したものが局所座標系を与える．”

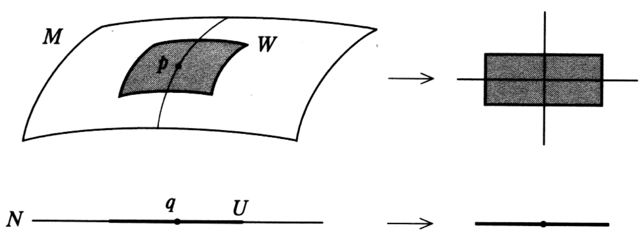


図 1.2

なお $m = n$ の場合，逆写像定理によれば，次が成り立つ．

“点 p が f の正則点，すなわち $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が線形同形のとき，点 p の近傍 W があって，f を W に制限した写像 $f_{|W}$ は，W から q の近傍 $V = f(W)$ への微分同相写像である．”

▶ **例 4**　$\mathbf{R}^m$ において，関数

$$f(x^1, \ldots, x^m) = (x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2$$

を考える．

$$df = 2(x^1\, dx^1 + \cdots + x^m\, dx^m)$$

より，正数 a に対して，球面 $\mathbf{S}^{m-1}(a) = \{p \in \mathbf{R}^m \mid f(p) = a^2\}$ は $\mathbf{R}^m$ の超

曲面を定め，点 $p \in \mathbf{S}^{m-1}(a)$ での接空間は，p と直交するベクトル全体と一致する (同一視できる)．すなわち，

$$T_p\mathbf{S}^{m-1}(a) = \{v \in \mathbf{R}^m \mid \langle v, p\rangle_0 = v^1p^1 + \cdots + v^mp^m = 0\}.$$

同様に，関数

$$h(x^1, \ldots, x^m) = -(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^m)^2$$

を考える．

$$dh = 2(-x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2 + \cdots + x^m\,dx^m)$$

より，$H = \{p \in \mathbf{R}^m \,|\, h(p) = c\}$ は $c \neq 0$ のとき $\mathbf{R}^m$ の超曲面となり，点 $p \in H$ での接空間は

$$T_pH = \{v \in \mathbf{R}^m \,|\, -v^1p^1 + v^2p^2 + \cdots + v^mp^m = 0\}$$

となる．$c = 0$ の場合，原点 O が関数 h の臨界点になっている． □

▶ **例 5**　実係数の m 次正方行列全体のなすベクトル空間を $M(m, \mathbf{R}) = \{A = (a_{ij}) \,|\, a_{ij} \in \mathbf{R}\}$ と記す．$M(m, \mathbf{R})$ 上の関数 $x_{ij}(A) = a_{ij}$ $(A = (a_{ij}))$ は $M(m, \mathbf{R})$ 上の自然な座標系を与え，$M(m, \mathbf{R})$ と $\mathbf{R}^n$ $(n = m^2)$ をベクトル空間, そして多様体として同一視する．行列 A に対して, その行列式 $\det A$ はその定義から明らかに C^∞ 級関数で，さらに行列の積に対して, $\det AB = \det A \det B$ を満たす．ここで，

$$GL(m, \mathbf{R}) = \{A \in M(m, \mathbf{R}) \,|\, \det A \neq 0\}$$

とおく．これは $M(m, \mathbf{R})$ の開集合 (開部分多様体) である．

関数 $\det : GL(m, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ の微分を求めよう．まず $GL(m, \mathbf{R})$ の点 A での接空間 $T_AGL(m, \mathbf{R})$ を $M(m, \mathbf{R})$ と同一視して考える．任意の $B \in M(m, \mathbf{R})$ に対して，

$$\det(A + tB) = \det A(E_m + tA^{-1}B) = \det A \det(E_m + tA^{-1}B) \quad (t \in \mathbf{R})$$

となることに注意する．ただし E_m は m 次単位行列を表す．ここで

$$\det(E_m + tA^{-1}B) = 1 + t\,\mathrm{trace}\,(A^{-1}B) + \cdots + t^m \det(A^{-1}B)$$

より，

$$\frac{d}{dt}\det(E_m + tA^{-1}B)(t = 0) = \mathrm{trace}\,(A^{-1}B)$$

となる．よって

$$\frac{d}{dt}\det(A+tB)(t=0)=\det A\operatorname{trace}(A^{-1}B),$$

すなわち，

$$(d\det)_A(B)=\det A\operatorname{trace}(A^{-1}B)$$

が従う．このように $GL(m,\mathbf{R})$ の各点は関数 det の正則点である．したがって

$$SL(m,\mathbf{R})=\{A\in GL(m,\mathbf{R})\mid \det A=1\}$$

とおくと，$SL(m,\mathbf{R})$ は $GL(m,\mathbf{R})$ の超曲面となり，接空間 $T_A SL(m,\mathbf{R})$ は $\operatorname{trace}(A^{-1}B)=0$ を満たす行列 B 全体からなる $M(m,\mathbf{R})$ の (m^2-1) 次元部分ベクトル空間である．単位行列 E_m での接空間は

$$T_{E_m}SL(m,\mathbf{R})=\{B\in M(m,\mathbf{R})\mid \operatorname{trace}B=0\}$$

によって与えられる．　□

▶ **例 6**　m 次対称行列全体のなすベクトル空間 $\{A\in M(m,\mathbf{R})\mid {}^tA=A\}$ を $\mathcal{S}_m$ と表す．ただし ${}^tA$ は A の転置行列を表す．(多様体として $\mathbf{R}^k$ $(k=m(m+1)/2)$ とみなして) $M(m,\mathbf{R})$ から $\mathcal{S}_m$ への写像 $f(A)={}^tAA-E_m$ を考える．f は C^∞ 級写像で，その微分は ($M(m,\mathbf{R})$ の接空間はそれ自身と同一視することによって)，次のように与えられる:

$$df_A(X)={}^tXA+{}^tAX \qquad (A,X\in M(m,\mathbf{R})).$$

これを確かめてみよう:

$$\begin{aligned}df_A(X)&=\frac{d}{ds}f(A+sX)(s=0)\\&=\frac{d}{ds}({}^t(A+sX)(A+sX)-E_m)(s=0)\\&=\frac{d}{ds}({}^tAA+s\,{}^tXA+s\,{}^tAX+s^2\,{}^tXX-E_m)(s=0)\\&={}^tXA+{}^tAX.\end{aligned}$$

次に，$\{A\in M(m,\mathbf{R})\mid f(A)=0\}$，すなわち m 次直交行列全体 $O(m)$ を考え，各 $A\in O(m)$ が f の正則点であることを確かめる．$X=\frac{1}{2}AB$ $(B\in M(m,\mathbf{R}))$ に対して，

$$df_A\left(\frac{1}{2}AB\right)=\frac{1}{2}({}^tB\,{}^tAA+{}^tAAB)=\frac{1}{2}({}^tB+B)$$

となる．よって $B \in \mathcal{S}_m$ とすると，$df_A(\frac{1}{2}AB) = B$．これは df_A が全射であることを示している．このように，$O(m)$ は $M(m, \mathbf{R})$ の閉部分多様体であり，次元は $m^2 - k = m(m-1)/2$ となる．これは m 次歪対称行列全体のなすベクトル空間 $\mathcal{A}_m = \{A \in M(m, \mathbf{R}) \mid {}^tA + A = 0\}$ の次元と一致する．さらに $B \in \mathcal{A}_m$ に対して，$df_A(AB) = 0$ より，df_A の核，すなわち $T_AO(m)$ は部分空間 $\{AB \mid B \in \mathcal{A}_m\}$ を含み，これらの次元が一致することから，$T_AO(m) = \{AB \mid B \in \mathcal{A}_m\}$ となることがわかる．とくに $A = E_m$ として，

$$T_{E_m}O(m) = \mathcal{A}_m = \{A \in M(m, \mathbf{R}) \mid {}^tA + A = 0\}$$

となる． □

1.1.3 ベクトル場と 1 次微分形式

多様体 M において，各点 p に対して一つの接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させる規則 X のことを M の**ベクトル場**とよぶ．ベクトル場全体のなす集合は，自然な加法とスカラー積

$$(\alpha X + \beta Y)_p = \alpha X_p + \beta Y_p \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

によってベクトル空間となるが，さらに，ベクトル場 X の関数 f 倍が，次のように定義される:

$$(fX)_p = f(p)X_p \qquad (p \in M).$$

また，M の開集合 U 上の C^∞ 級関数 h に対して，

$$(X(h))(p) = X_p(h) \qquad (p \in M)$$

とおくことによって U 上の関数 $X(h)$ が定まるが，任意の C^∞ 級関数 h に対して $X(h)$ も C^∞ 級であるとき，ベクトル場 X は C^∞ 級であるという．これは，任意の座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ において，座標基底に関して

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} X^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

と表すとき，各成分関数 $X^i \, (= X(x^i))$ が C^∞ 級であるといい換えてもよい．

以後とくに断らない限り，ベクトル場はすべて C^∞ 級のものを考え，それら全体を $\mathcal{X}(M)$ と記す．ベクトル場 X は次の二つの性質 —— 線形性 (i) とライ

プニッツ則 (ii) —— を満たす $C^\infty(M)$ から $C^\infty(M)$ への写像 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ として定義できる:

(i) $X(\alpha f + \beta h) = \alpha X(f) + \beta X(h) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ f, h \in C^\infty(M))$,
(ii) $X(fh) = X(f)h + fX(h) \qquad (f, h \in C^\infty(M))$.

この視点から，二つのベクトル場 X と Y に対して，

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

とおくことによって，新しいベクトル場 $[X, Y]$ が定義できる．$[X, Y]$ を X と Y の**交換子** (あるいは**リー括弧積**) という．座標近傍 $(U, (x^1, \dots, x^m))$ において，交換子 $[\ ,\ ]$ を表してみよう．ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^m X^i(\partial/\partial x^i)$ と $Y = \sum_{i=1}^m Y^i(\partial/\partial x^i)$ に対して，$X^i = X(x^i)$，$Y^i = Y(x^i)$ より，

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^m [X, Y](x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

となる．なお，ベクトル空間 $\mathcal{X}(M)$ における交換子 $[\ ,\ ]$ は，その定義から次の性質 (iii)–(v) を満たすことが確かめられる．$X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して，

(iii) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$,
(iv) $[X, Y] = -[Y, X]$,
(v) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \qquad$ (ヤコビ律).

さらに $f, h \in C^\infty(M)$ に対して，
(vi) $[fX, hY] = fh[X, Y] + fX(h)Y - hY(f)X$.

一般にベクトル空間 V において，V の任意の二つの元 x, y の間に積 $[x, y]$ が定義されていて，上の三つの条件 (iii), (iv), (v) が満たされるとき，V (と積 $[\ ,\ ]$ の組) を**リー環**という．たとえば，多様体のベクトル場全体 $\mathcal{X}(M)$ は，(ベクトル場の交換子によって) リー環となる．

次に，視点を変えてベクトル場の積分曲線について簡単に説明しよう．多様体 M 上のベクトル場 X に対して，C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a < t < b)$ の接ベクトル $c'(t)$ が点 $c(t)$ での X の定める接ベクトル $X_{c(t)}$ につねに等しいとき，c を X の**積分曲線**という．座標近傍 $(U, (x^1, \dots, x^m))$ で考えると，(c が U に含まれている範囲において) m 個の関数 $c^i(t) = x^i(c(t))$ $(i = 1, \dots, m)$ が，次

の常微分方程式系を満たすことにほかならない：

$$\frac{d}{dt}c^i(t) = X^i(c^1(t), \ldots, c^m(t)) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

ただし $X = \sum_{i=1}^{m} X^i(\partial/\partial x^i)$．したがって常微分方程式の一般論より，$M$ のコンパクト集合に対して，それを含む開集合 V と正数 a が存在して，任意の $p \in V$ に対し，p を始点とする (すなわち $c_p(0) = p$ となる) 区間 $(-a, a)$ において定義された X の積分曲線 $c_p(t)$ がただ一つ存在する．さらに写像 $(p, t) \to c_p(t)$ は C^∞ 級微分可能である．

ここで，t を一つ固定して $\phi_t(p) = c_p(t)$ とおけば，ϕ_t は V から M の開集合 $\phi_t(V)$ への C^∞ 級微分同相写像で $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ が両辺の定義されているところで成り立つ．このように，ベクトル場 X は M の局所 C^∞ 級微分同相写像の**局所 1 径数変換群** (あるいは**流れ**) を生成する．すべての積分曲線に対して，その定義域として $\mathbf{R}$ 全体がとれるとき，ベクトル場 X は**完備ベクトル場** であるという．たとえば，上の V として M 全体がとれるとき，X は完備であることを示すことができ，したがって M の C^∞ 級微分同相写像からなる **1 径数変換群** $\{\phi_t \mid t \in \mathbf{R}\}$ を生成する．

▶ **例 7**　2 次元球面 $\mathbf{S}^2(a)\,(\subset \mathbf{R}^3)$ の点 $p = (x, y, z)$ に対して，

$$\begin{aligned}\phi_t(p) &= (x\cos t - y\sin t,\ x\sin t + y\cos t,\ z)\\ &= (x, y, z)\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とおくことによって，$\mathbf{S}^2(a)$ の流れ $\{\phi_t \mid t \in \mathbf{R}\}$ が定まる．この流れを生成するベクトル場 X は $X_p = (-y, x, 0)$ で与えられる．□

さて，1 次微分形式について説明しよう．多様体 M の各点 p に対して，T_pM の双対空間 T_p^*M の元 ω_p を対応させる規則 ω で，M の任意の開集合 U 上定義されているすべてのベクトル場 X に対して関数 $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)\ (p \in U)$ が C^∞ 級であるものを，M 上の **1 次微分形式**という．たとえば，M の C^∞ 級関数 f は 1 次微分形式 df を定める．

1 次微分形式 ω と C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が与えられたとき，c に沿う

ω の積分 (線積分) を次のように定める:

$$\int_c \omega = \int_a^b \omega(c'(t))\,dt.$$

ここで開集合 U において，ある関数 $f \in C^\infty(U)$ があって $\omega = df$ となっているならば，U 内の任意の C^∞ 曲線 c に対して，

$$\int_c \omega = \int_c df = \int_a^b \frac{df(c(t))}{dt}\,dt = f(c(b)) - f(c(a))$$

となり，積分の値は c の両端の点 $c(a), c(b)$ のみで決まってしまう．とくに $c(a) = c(b)$ となる U 内のすべての C^∞ 曲線 c に対して $\int_c \omega = 0$ となる．これが，U において $\omega = df$ と表すことができる必要条件であり，また十分条件でもある．実際，U の各連結成分 U_0 において一点 p を固定して，U_0 の任意の点 q に対して p と q を結ぶ C^∞ 級曲線 c を一つとり，$f(q) = \int_c \omega$ によって関数 f を定義すればよい．

▶ **例 8**　xy 平面 $\mathbf{R}^2$ から原点を除いて得られる多様体上の 1 次微分型式

$$\omega = \left(\frac{1}{2\pi}\right)(x^2 + y^2)^{-1}(-y\,dx + x\,dy)$$

を考える．整数 n に対して，曲線 $c_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とおくと，$\int_{c_n} \omega = n$ となる．一般に，原点をとおらない C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で $c(a) = c(b)$ であるものに対して $\int_c \omega$ は整数となることが示され，これは，ループ c の原点に関する回転数を表している (2.5.4 項，3.3.3 項，例題 3.6 参照). □

さて，多様体 M の 1 次微分形式全体のなすベクトル空間を $A^1(M)$ と記す．ベクトル場の関数倍と同様にして，$\eta \in A^1(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して，1 次微分形式 $f\eta$ が

$$(f\eta)_p = f(p)\eta_p \qquad (p \in M)$$

によって定まる．また二つの 1 次微分形式 η と ω が与えられているとき，各点 $p \in M$ に対して，接空間 T_pM 上の双線形形式 $\eta_p \otimes \omega_p$ が

$$(\eta_p \otimes \omega_p)(u, v) = \eta_p(u)\omega_p(v) \qquad (u, v \in T_pM)$$

によって定義される．このようにして得られる各点に双線形形式を対応させる規則

$$p \to \eta_p \otimes \omega_p$$

を η と ω の**テンソル積**といい，$\eta \otimes \omega$ と記す．テンソル積 $\eta \otimes \omega$ の関数倍 $f(\eta \otimes \omega)$ も上と同様に定義される．

テンソル積は次の性質 (i)–(iii) を満たす．η, ω, $\xi \in A^1(M)$ と f, $h \in C^\infty(M)$ に対して，

(i) $f(\eta \otimes \omega) = (f\eta) \otimes \omega = \eta \otimes (f\omega)$,

(ii) $(f\eta + h\omega) \otimes \xi = f(\eta \otimes \xi) + h(\omega \otimes \xi)$,

(iii) $\xi \otimes (f\eta + h\omega) = f(\xi \otimes \eta) + h(\xi \otimes \omega)$.

また，多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像 f と N 上の 1 次微分形式 η に対して，M 上の 1 次微分形式 $f^*\eta$ (f による η の引き戻し) が

$$(f^*\eta)_p(v) = \eta_{f(p)}(df_p(v)) \qquad (p \in M)$$

によって定義され，$\eta = dh$ ($h \in C^\infty(N)$) のときには，

(iv) $f^*(dh) = d(f^*h)$

となる．それからテンソル積に関して，

(v) $f^*(\eta \otimes \omega) = (f^*\eta) \otimes (f^*\omega)$

となる．

一般のテンソル場や微分形式については，その定義をはじめ基本的ないくつかの事柄は，これからの議論に必要な範囲で節を改めて説明することにしよう．これらによって表現される多様体の幾何学と解析学への入り口に案内することが本書の目的である．

さて，本書において多様体はすべて **σ(シグマ)–コンパクト**であるとする．つまり，有限または可算個のコンパクト集合の和として表される多様体を考える．たとえば，$\mathbf{R}^m$ あるいは $\mathbf{R}^m$ に埋め込まれた部分多様体は σ–コンパクトである．

次の基本的な定理を述べよう (証明や応用例などは，たとえば [3, 4, 5, 7] などにある)．

定理 1.1 M を σ–コンパクト多様体とする．M の開集合からなる任意の被覆 $\{U_i \,|\, i \in I\}$ に対して，次の性質 (i), (ii) を満たす M の開集合からなる被

覆 $\{V_k \mid k \in K\}$ が存在する.

(i) 各 V_k はある U_i に含まれる.

(ii) 各点 $p \in M$ に対して，p のある適当な近傍 W をとると，W は有限個の V_k とのみ交わる．すなわち $W \cap V_k \neq \emptyset$ となる V_k は有限個である（$\bigcup_{k \in K} V_k = M$ より少なくとも一つの V_k と交わる).

さらに M 上の C^∞ 級関数の族 $\{\phi_k\}$ で次の性質 (iii), (iv) を満たすものが存在する.

(iii) ϕ_k の台，すなわち $\{x \in M \mid \phi_k(x) \neq 0\}$ の閉包は V_k に含まれる.

(iv) 各 ϕ_k は $\phi_k \geqq 0$ であり，さらに任意の $p \in M$ に対して $\sum_{k \in K} \phi_k(p) = 1$.

上の (i), (ii) を満たす M の開集合からなる被覆 $\{V_k\}$ を，$\{U_i\}$ に従属した**局所有限開被覆**という．また，(iii) と (iv) を満たす C^∞ 級関数族 $\{\phi_k\}$ を $\{V_k\}$ に従属した**単位の分解**という．なお (iv) における和は，(ii), (iii) の性質から有限和であることに注意する.

多様体 M 上の 1 次微分形式 ω によって，ベクトル場 X に C^∞ 級関数 $\omega(X)$ を対応させると，この対応は

(vi) $\omega(fX + hY) = f\omega(X) + h\omega(Y) \qquad (f, h \in C^\infty(M),\ X, Y \in \mathcal{X}(M))$

を満たす.

逆に，このような性質を満たす写像，$\mathcal{X}(M)$ から $C^\infty(M)$ への $C^\infty(M)$ 上の線形写像 $\omega : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ は，M 上の 1 次微分形式とみなすことができる．これを説明しよう．まず開集合 U において $X = 0$ となるベクトル場 X に対して，U において $\omega(X) = 0$ であることに注意する．なぜならば，U の任意の点 p に対して，$f \in C^\infty(M)$ を $f(p) = 0$ かつ U の外で $f = 1$ となるようにとる．このとき，$X = fX$ より,

$$\omega(X)(p) = \omega(fX)(p) = f(p)\omega(X)(p) = 0$$

となる．このように，二つのベクトル場 X, Y が開集合 U において一致していれば，$\omega(X), \omega(Y)$ も U において一致していることがわかる．さらに一点 p において $X_p = Y_p$ ならば，$\omega(X)(p) = \omega(Y)(p)$ となる．これを確かめてみよう．点 p を含む座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ を考え，ここで $X - Y = \sum_{i=1}^m f^i(\partial/\partial x^i)$ と表す．$X_p = Y_p$ より，$f^i(p) = 0\ (i = 1, \ldots, m)$ である．次に M 上の C^∞

級関数 h^i とベクトル場 E_i $(i=1,\ldots,m)$ の組を，点 p の近傍 V において $h^i=f^i$, $E_i=\partial/\partial x^i$ となるようにとる．このとき，V において $X-Y=\sum_{i=1}^{m} h^i E_i$ であるから，V において

$$\omega(X-Y)=\omega\left(\sum_{i=1}^{m} h^i E_i\right)=\sum_{i=1}^{m} h^i \omega(E_i)$$

となり，したがって，

$$\omega(X)(p)-\omega(Y)(p)=\omega(X-Y)(p)=\sum_{i=1}^{m} h^i(p)\omega(E_i)(p)=0$$

となる．このように (vi) を満たすとき，$\omega(X)$ の一点 p での値 $\omega(X)(p)$ は X の点 p での値 $v=X_p$ のみによって決まり，$\omega_p(v)=\omega(X)(p)$ によって，1 次微分形式が定まる．

1.2　リーマン多様体

本節では，多様体上のリーマン計量および C^∞ 級 (微分可能) 写像による誘導計量の定義を述べる．

1.2.1　リーマン計量

多様体の上のリーマン計量の定義を与えることからはじめる．m 次元多様体 M の各点 p での接空間 T_pM 上に内積，すなわち正定値対称 2 次形式 $g_p : T_pM \times T_pM \to R$ が与えられ，対応 $p \to g_p$ が C^∞ 級であるとき，$g=\{g_p\}$ を M 上の**リーマン計量**という．ここで対応 $p \to g_p$ が C^∞ 級であるとは，任意の開集合 U 上の任意のベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ に対して，U 上の関数 $p \to g_p(X_p, Y_p)$ が C^∞ 級であるという意味である．

まず局所座標系を使って，リーマン計量 g を表示してみる．開集合 U 上に局所座標系 $\phi=(x^1,\ldots,x^m)$ が与えられているとする．これから得られる m 個のベクトル場 $(\partial/\partial x^i)$ $(i=1,\ldots,m)$ は，U の各点 p での接空間 T_pM の基底をなすので，二つの接ベクトル $u, v \in T_pM$ をそれぞれ $u=\sum_{i=1}^{m} u^i(\partial/\partial x^i)_p$, $v=\sum_{i=1}^{m} v^i(\partial/\partial x^i)_p$ と一意的に表すことができ，

$$g_p(u,v)=\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(p)u^i v^j$$

となる．ただし $g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$ とおいた．各 g_{ij} は U 上の C^∞ 級関数で，これを局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に関する g の (i,j) **成分**という．これらを用いて，座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ において，g を

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

と表すことができる．

次に，座標変換によるリーマン計量 g の成分が満たす変換の規則を調べてみよう．U において別の局所座標系 $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ が与えられたとき，座標基底の変換則 (1.2) より，g の局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ と $(y^1, \ldots, y^m)$ に関するそれぞれの成分 g_{ij} と $\bar{g}_{ij} = g(\partial/\partial y^i, \partial/\partial y^j)$ は次の変換則を満たす:

$$\bar{g}_{ij} = \sum_{h,k=1}^{m} \frac{\partial x^h}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} g_{hk}, \qquad g_{ij} = \sum_{h,k=1}^{m} \frac{\partial y^h}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \bar{g}_{hk}. \tag{1.3}$$

いい換えれば，$\sum_{i=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$，$\sum_{i=1}^{m} \bar{g}_{ij} dy^i \otimes dy^j$ それぞれで与えられる U における二つのリーマン計量は，上の変換則 (1.3) が満たされているとき，U において同じリーマン計量を定める．

リーマン計量 g の与えられた多様体 M を**リーマン多様体**といい，(M, g) で表す．また簡単のためリーマン多様体 (M, g) において点 p での接ベクトル u, v の内積 $g_p(u, v)$ を $\langle u, v \rangle$ と表したり，u の長さ (ノルム) $\sqrt{g_p(u, u)}$ を $\|u\|$ と記すことも多い．

▶ **例 9** $\mathbf{R}^m$ にその標準座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ を用いて，リーマン計量 g_0 を次のように定める:

$$g_0 = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^m \otimes dx^m.$$

すなわち，g_0 は $\mathbf{R}^m$ の各点 p の接空間 $T_p R^m$ において，$\{(\partial/\partial x^1)_p, \ldots, (\partial/\partial x^m)_p\}$ が正規直交基底となるようなリーマン計量である．この g_0 を $\mathbf{R}^m$ の**ユークリッド計量** とよび，$(\mathbf{R}^m, g_0)$ を m 次元**ユークリッド空間**とよぶ．また上の標準座標系を，$(\mathbf{R}^m, g_0)$ の**直交座標系**という．

一般に，m 次元 (実) ベクトル空間に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする．このとき，V の各点 u に対して，移動 $\tau_u : v \to u + v$ をとおして $T_u V$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle_u$ が定義される．すなわち，$\langle d\tau_u(v), d\tau_u(w) \rangle_u = \langle v, w \rangle$ $(v, w \in V)$．このようにして V 上のリーマン計量 g を定める．V の一つの基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$

を選び，$\{e^1,\dots,e^m\}$ をその双対基底とする．V の座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ を $x^i(v)=e^i(v)$ $(i=1,\dots,m)$ によって定義して，これによって g を表示すると，

$$g=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}dx^i\otimes dx^j \qquad (a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle\in\mathbf{R})$$

となる．もし $\{e_1,\dots,e_m\}$ が正規直交基底であれば，g はユークリッド計量そのものである． □

m 次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^m,g_0)$ の部分多様体 M に対して，M の接空間 T_pM は自然に $T_p\mathbf{R}^m$ の線形部分空間とみなせるので，g_0 を T_pM に制限することによって内積が決まり，したがって M 上のリーマン計量が定まる．たとえば，単位球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ にはこのように自然にリーマン計量が定まり，$\mathbf{S}^{m-1}$ の**標準計量**という．

さて，多様体 M 上にリーマン計量 g と正値 C^∞ 級関数 ξ が与えられているとき，新しいリーマン計量 ξg が，

$$(\xi g)_p(u,v)=\xi(p)g_p(u,v) \qquad (u,v\in T_pM)$$

によって定まる．また，二つのリーマン計量 g と h に対して，

$$(g+h)_p(u,v)=g_p(u,v)+h_p(u,v) \qquad (u,v\in T_pM)$$

とおくことによって，新しいリーマン計量 $g+h$ が定まる．多様体は σ–コンパクトと仮定しているので，たとえば単位の分解 (定理 1.1 参照) を使って，座標近傍上で定めたリーマン計量を貼り合わせて多様体全体で定義されたリーマン計量を構成したり，多様体をユークリッド空間に埋め込まれた部分多様体として実現するなどによってリーマン計量の存在を示すことができる (たとえば [3, 4, 5, 7] など参照).

1.2.2 誘導計量

$f:M\to N$ を多様体 M から N への C^∞ 級写像とし，h を N 上のリーマン計量とする．h の f による引き戻し f^*h を次のように定める．M の各点 p において，

$$(f^*h)_p(u,v)=h_{f(p)}(df_p(u),df_p(v)) \qquad (u,v\in T_pM).$$

ここで $(f^*h)_p(u,u)=0$ となるのは，リーマン計量 h の正定値性より，$df_p(u)=$

0 のとき，かつそのときに限る．よって，M の各点 p において f の微分 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射のとき，すなわち f が**はめ込み写像**のとき，f^*h は M 上のリーマン計量を定める．これをはめ込み写像 $f : M \to N$ による h の**誘導計量**とよぶ．リーマン多様体の部分多様体の場合には，包含写像によって誘導計量が定まる．以後断らない限り，リーマン多様体の部分多様体を考えるときにはその誘導計量を考え，**リーマン部分多様体**という．

はめ込み写像 $f : M \to N$ による N 上のリーマン計量 h の誘導計量 $g = f^*h$ を局所座標系を使って表してみる．$(U, (x^1, \ldots, x^m)), (V, (y^1, \ldots, y^n))$ をそれぞれ $f(U) \subset V$ となるような多様体 M, N の座標近傍とし，$f^i = y^i \circ f$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく．局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に関する $g = f^*h$ の成分を求めると，U の点 p において，

$$
\begin{aligned}
g_{ij}(p) &= (f^*h)_{ij}(p) \\
&= h_{f(p)}\left(df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \ df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) \\
&= h_{f(p)}\left(\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial f^a}{\partial x^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(p)}, \ \sum_{b=1}^{n}\frac{\partial f^b}{\partial x^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_{f(p)}\right) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n}\frac{\partial f^a}{\partial x^i}(p)\frac{\partial f^b}{\partial x^j}(p)h_{f(p)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^a}\right)_{f(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)_{f(p)}\right) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n}\frac{\partial f^a}{\partial x^i}(p)\frac{\partial f^b}{\partial x^j}(p)h_{ab}(f(p))
\end{aligned}
$$

となり，したがって

$$
f^*h = \sum_{i,j=1}^{m}\left(\sum_{a,b=1}^{n} f^*h_{a,b}\left(\frac{\partial f^a}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial f^b}{\partial x^j}\right)\right)dx^i \otimes dx^j
$$

と表される．

次に，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ に埋め込まれている m 次元部分多様体 M を考えてみる．M の任意の点 p に対して，$\mathbf{R}^n$ における p の近傍 W，$\mathbf{R}^m$ の開集合 V，V から $\mathbf{R}^n$ への C^∞ 級写像 $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))$ $(x = (x^1, \ldots, x^m) \in V)$ で，f は V から $U = M \cap W$ の上への同相写像であり，V の各点で m 個のベクトル

$$
df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i}, \ldots, \frac{\partial f^n}{\partial x^i}\right) \qquad (i = 1, \ldots, m)
$$

が一次独立であるものがとれる．したがって，U 上の M の局所座標系として，$(x^1, \ldots, x^m)$ (厳密には $x^i \circ f_{|U}{}^{-1}$) がとれる．この座標系を用いて，M 上の誘導計量 g を表現してみると，

$$g = \sum_{a=1}^{n} df^a \otimes df^a = \sum_{i,j=1}^{m} \Big(\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \frac{\partial f^a}{\partial x^j} \Big) dx^i \otimes dx^j$$

となる．さらに，M が超曲面 $(m = n-1)$ で，$U = M \cap W$ が V 上の関数 h のグラフとして表されているとき，すなわち

$$U = \{ (x^1, \ldots, x^{n-1}, h(x)) \,|\, x = (x^1, \ldots, x^{n-1}) \in V \}$$

のとき，

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} \Big(\delta_{ij} + \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} \Big) dx^i \otimes dx^j$$

と表される．ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

▶ **例 10**　$\mathbf{R}^m$ の単位球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ から“北極” $p_1 = (0, \ldots, 0, 1)$ を除いた開集合 $\mathbf{S}^{m-1} \backslash \{p_1\}$ から $\mathbf{R}^{m-1}$ への同相写像 σ を次で定める．$p = (y^1, \ldots, y^m) \in \mathbf{S}^{m-1}$ に対して，

$$\sigma(p) = (x^1, \ldots, x^{m-1}), \quad x^i = \frac{y^i}{1 - y^m} \qquad (i = 1, \ldots, m-1).$$

北極 p_1 と点 p をとおる直線と $\mathbf{R}^{m-1}$ $(\subset \mathbf{R}^m)$ との交点が $\sigma(p)$ であり，写像 σ を (北極 p_1 を中心とする) **立体射影**という．

この逆写像 $\rho : \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{S}^{m-1} \backslash \{p_1\}$ は次で与えられる．$q = (x^1, \ldots, x^{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$ に対して，

$$\rho(q) = \left(\frac{2x^1}{1 + \|q\|_0{}^2}, \ldots, \frac{2x^{m-1}}{1 + \|q\|_0{}^2}, \frac{-1 + \|q\|_0{}^2}{1 + \|q\|_0{}^2} \right),$$

したがって，$\mathbf{S}^{m-1}$ の標準計量 g_1 をこの局所座標系 $\sigma = (x^1, \ldots, x^{m-1})$ で表すと，

$$g_1 = \left(\frac{2}{1 + \sum_{i=1}^{m-1} (x^i)^2} \right)^2 (dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^{m-1} \otimes dx^{m-1})$$

となる．　□

さて，二つのリーマン多様体 (M, g) と (N, h) に対して，$\pi_1 : M \times N \to M$，$\pi_2 : M \times N \to N$ をそれぞれ自然な射影とすると，直積多様体 $M \times N$ 上の

リーマン計量 $g \times h$ が $g \times h = \pi_1^* g + \pi_2^* h$ によって定まる．この計量を g と h の**直積計量**とよび，$(M \times N, g \times h)$ を (M, g) と (N, h) の**リーマン直積**という．次に M の C^∞ 級正値関数 w に対して，$g \times_w h = \pi_1^* g + \pi_1^* w^2 \pi_2^* h$ によって，$M \times N$ 上にリーマン計量が定まる．これを正値関数 w による**ねじれ計量**とよび，$(M \times N, g \times_w h)$ を M と N の**ねじれ積**という．$w = 1$ の場合がリーマン直積である．点 $(p, q) \in M \times N$ において，$T_{(p,q)}(M \times N)$ はベクトル空間として自然に T_pM と T_qN の直和となっているが，これは $(g \times_w h)_{(p,q)}$ に関して直交分解となっている．ここで $(U, (x^1, \ldots, x^m))$，$(V, (y^1, \ldots, y^n))$ をそれぞれ M と N の座標近傍とし，g_{ij}, h_{ab} をそれぞれ g, h の成分とすると，$(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$ は $U \times V$ の局所座標系を与え，$g \times_w h$ は次のように表される:

$$(g \times_w h)_{(p,q)} = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(p) dx^i \otimes dx^j + w(p)^2 \sum_{a,b=1}^{n} h_{ab}(q) dy^a \otimes dy^b.$$

▶ **例 11** $\mathbf{R}^2 \backslash \{\mathrm{O}\}$ の点 $p = (x, y)$ の極座標 (r, θ) を使ってユークリッド計量 g_0 を表すと，$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$，$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$ より $g_0 = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$ となる．一般に，$\mathbf{R}^m$ から原点を除いた開集合 $\mathbf{R}^m \setminus \{\mathrm{O}\}$ は，半直線 $(0, \infty)$ と単位球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ との直積多様体となっている．具体的には，$\mathbf{R}^m \setminus \{\mathrm{O}\}$ の点 $p = (y^1, \ldots, y^m)$ と $(0, \infty) \times \mathbf{S}^{m-1}(1)$ の点 (r, q) を次のように対応させる:

$$r = \|p\|_0, \qquad q = \left(\frac{y^1}{\|p\|_0}, \ldots, \frac{y^m}{\|p\|_0} \right).$$

ここでユークリッド計量 g_0 を $(0, \infty) \times \mathbf{S}^{m-1}$ 上の計量として表すと，

$$g_0 = dr \otimes dr + r^2 g_1$$

となる．ただし g_1 は $\mathbf{S}^{m-1}$ の標準計量である． □

1.3 リーマン距離

リーマン多様体 $M = (M, g)$ では，曲線の長さを考えることができる．M 内の C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ に対して，その長さ $L(c)$ を

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\|\, dt \quad \left(= \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt \right)$$

で定める．これは 曲線 c のパラメータのとり方によらずに決まる．正確に述べると，η を区間 $[c,d]$ から区間 $[a,b]$ の上への C^∞ 級関数とし，$[c,d]$ 上いたるところ $\eta' > 0$ または $\eta' < 0$ と仮定する．前者の場合 $\eta(c) = a$, $\eta(d) = b$ となり，後者の場合 $\eta(c) = b$, $\eta(d) = a$ となる．ここで $\widetilde{c}(s) = c(\eta(s))$ とおくと，

$$L(\widetilde{c}) = \int_c^d \left\| \frac{d\widetilde{c}}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \left| \frac{d\eta}{ds} \right| ds = \int_a^b \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt = L(c).$$

さらに $s(t) = \displaystyle\int_a^t \|c'(u)\| \, du$ とおき，$\widetilde{c}(s) = c(t(s))$ とパラメータを変えると，$ds/dt = \|dc/dt\|$ より $\|d\widetilde{c}/ds\| = 1$ となる．

一般に，曲線 c は $\|c'\|$ が定数のとき，曲線 c は弧長に比例したパラメータをもつ，あるいは定速であるといい，つねに $\|c'\| = 1$ のとき弧長をパラメータとしてもつ，単位の速さである，あるいは簡単に**正規曲線**であるという．

以下，リーマン多様体 M は断らない限り連結 (したがって弧状連結) であるとする．M 上の区分的 C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ 全体を $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M)$ とおく．各 $c \in \Omega_{\mathrm{p.s.}}(M)$ に対して，区間のある分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ があって，各部分区間 $[t_i, t_{i+1}]$ において C^∞ 級であるので，その長さ

$$L(c) = \sum_{i=0}^{k-1} L(c_{|[t_i, t_{i+1}]})$$

が定まり，L は $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M)$ 上の関数 (この場合 “汎” 関数とよぶ) を与える．さらに M のすべての二点 p と q に対して，$c(a) = p$, $c(b) = q$ を満たす $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M)$ の元 c 全体を $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ と記し，$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ での L の下限

$$d_g(p, q) := \inf\{L(c) \mid c \in \Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)\} \tag{1.4}$$

によって，$M \times M$ 上の関数 d_g を定める．本節の終わりで命題としてまとめるが，$d_g : M \times M \to [0, \infty)$ は M における距離を定め，さらに d_g の定める位相と多様体 M の位相は一致する．

▶ **例 12** ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^m, g_0)$ を考える．この場合，よく知られているとおり，二点間の距離はそれらを結ぶ線分の長さであり，パラメータの変換を除いて距離を与える曲線はこれで与えられる．以下この事実を確かめよう．まず (1.4) で定まる関数を d_0 と記すと，任意の二点 $p, q \in \mathbf{R}^m$ に対して，

$$d_0(p, q) = \|p - q\|_0 = \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle_0}$$

であるというのが主張である．なお，$\|p-q\|_0$ は，p と q を結ぶ線分 $c_{pq}(t) = tp+(1-t)q$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の長さである．$v \in \mathbf{R}^m$ に対して，移動 $\tau_v : x \to v+x$ はユークリッド計量を保つ，すなわち $\tau_v^* g_0 = g_0$ を満たすので，p が原点 O である場合を考えれば十分である．$c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を O と q を結ぶ C^∞ 級曲線とする．簡単のため，$(a,b]$ において $\|c(t)\|_0 > 0$ と仮定する．このとき $c(t) = f(t)u(t)$ と表すことができる．ただし $\|u(t)\|_0 = 1$，すなわち $u(t)$ は単位球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ 内の曲線である．したがって

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), u(t)\rangle_0 = 2\langle u(t), u'(t)\rangle_0 = 0$$

となり，$c'(t) = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$ のノルムは，$\|c'\|_0 = \sqrt{(f')^2 + f^2\|u'\|_0^2}$ で与えられる．よって，

$$L(c) = \int_a^b \|c'\|_0 \, dt \geqq \int_a^b |f'| \, dt \geqq \left| \int_a^b f' \, dt \right|_0 = \|q\|_0.$$

これが $(a,b]$ において，$\|c(t)\|_0 > 0$ という条件をおとしても，そして区分的に C^∞ 級の曲線に対しても成り立つことをみるのはやさしい．よって $d_0(\mathrm{O}, q) \geqq \|q\|_0$．また O と q を結ぶ線分 $\{tq \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ を考えることによって，$d(\mathrm{O}, q)_0 = \|q\|_0$ が導かれる．　□

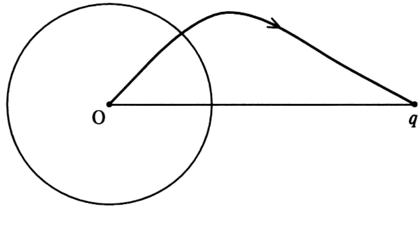


図 1.3

以上の議論において，極座標の役割が示唆されている．一般のリーマン多様体に対しても，局所的に“極座標”が導入され，リーマン多様体を調べる上で基本となる．

ここで，一般のリーマン多様体 $M = (M, g)$ にもどろう．(1.4) で定義された $d_g : M \times M \to [0, \infty)$ が，対称性 $d_g(p,q) = d_g(q,p)$，および三角不等式 $d_g(p,q) \leqq d_g(p,r) + d_g(r,q)$ を満たすことを確かめるのはその定義からやさし

い．また非負値性 $(d_g(p,q) \geqq 0)$ も明らかである．$d_g(p,q)=0$ ならば $p=q$ であること，そして $p \in M$ と正数 a に対して $B(p,a)=\{q \in M \mid d_g(p,q)<a\}$ とおくとき，$\{B(p,a) \mid a>0\}$ が点 p の基本近傍系をなしていることを以下において示す．座標近傍 $(U, \phi=(x^1,\ldots,x^m))$ において考える．簡単のため U と $\phi(U)$ を同一視し，さらに U は $\mathbf{R}^m$ の原点を含むとしよう．この局所座標系を用いて，$g=\sum_{i,j=1}^m g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ と表す．ここで適当な正数 a を選んで，半径 $4a$ の $\mathbf{R}^m$ での球体 $\mathbf{B}^m(4a)$ は U に含まれるとする．さらに，U において g の各成分 g_{ij} は C^∞ 級で，U の各点 p において正定値対称行列 $\big(g_{ij}(p)\big)$ をなすので，適当な正の定数 λ, Λ をみつけて，

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^m (\xi^i)^2 \leqq \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(p)\xi^i\xi^j \leqq \Lambda^2 \sum_{i=1}^m (\xi^i)^2 \tag{1.5}$$

が，すべての点 $p \in \mathbf{B}^m(3a)$ とベクトル $\xi \in \mathbf{R}^m$ に対して成り立つとしてよい．すなわち，行列 $\big(g_{ij}(p)\big)$ の最小固有値と最大固有値がそれぞれ定数 λ^2 と Λ^2 によって下から，および上から押さえられているということである．

次に，$\mathbf{B}^m(a)$ の二点 p, q に対して，まず $c_{pq}(t)=tp+(1-t)q$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で定まる p と q を結ぶ曲線 c_{pq} をとることによって，d_g の定義と (1.5) より，

$$\begin{aligned} d_g(p,q) &\leqq L(c_{pq}) \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(c_{pq}(t))(x^i(p)-x^i(q))(x^j(p)-x^j(q)) \Big)^{1/2} dt \\ &\leqq \Lambda d_0(p,q), \end{aligned}$$

また $d_g(p,q)$ の定義から，任意の正数 ε に対して，p と q を結ぶ区分的に C^∞ 級曲線 $\gamma(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で $d_0(p,q)+\varepsilon \geqq L(\gamma)$ を満たすものがとれる．ここで，γ が $\mathbf{B}^m(3a)$ に含まれるとすると，(1.5) より

$$L(\gamma) \geqq \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} x^i(\gamma(t)) \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

となり，右辺は $\lambda d_0(p,q)$ より大きいか等しいので，$d_g(p,q)+\varepsilon \geqq \lambda d_0(p,q)$ となる．また，γ が $\mathbf{B}^m(3a)$ に含まれないときには，$\gamma(t)$ が最初にその外へでるパラメータの値を T としよう．このとき上の議論と同様にして，

$$L(\gamma) \geqq L(\gamma_{|[0,T]}) \geqq \lambda d_0(p, \gamma(T)) \geqq 2\lambda a$$

となることが確かめられる．さらに $d_0(p,q) \leqq 2a$ に注意すると $L(\gamma) \geqq$

$\lambda d_0(p,q)$ である．したがって，このときも $d_g(p,q)+\varepsilon \geqq \lambda d_0(p,q)$ となる．ここで ε をいくらでも小さくとることによって，$d_g(p,q) \geqq \lambda d_0(p,q)$ となり，先の不等式と合わせて，すべての二点 $p,q \in \mathbf{B}^m(a)$ に対して，

$$\lambda d_0(p,q) \leqq d_g(p,q) \leqq \Lambda d_0(p,q)$$

を得る．この考察から二点 $p,q \in M$ に対して，$d_g(p,q)=0$ ならば $p=q$ であること，そして $\{B(p,a)\,|\,a>0\}$ が点 p の基本近傍系をなしていることをみることはやさしい．

リーマン多様体 (M,g) の点 p と正数 a に対して，$B(p,a)$ を リーマン多様体 (M,g) の点 p を中心とする半径 a の**距離球体**とよぶ．

以上示したことを命題としてまとめる．

命題 1.2 連結リーマン多様体 (M,g) において，(1.4) で定義された d_g は，次の距離の公理を満たす．

(i) $d_g(p,q) \geqq 0$，さらに $d_g(p,q)=0 \Longleftrightarrow p=q$.

(ii) $d_g(p,q)=d_g(q,p)$.

(iii) $d_g(p,q) \leqq d_g(p,r)+d_g(r,q)$.

さらに距離 d_g の定める位相は，M の位相と一致する．

1.4 測地線の方程式

リーマン多様体 $M=(M,g)$ の二点 p,q に対して，p と q を結ぶ最短曲線，すなわち $L(c)=d_g(p,q)$ を満たす $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M;p,q)$ の元 c が存在するとは限らない．たとえば，ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^m, g_0)$ では，二点 p,q を結ぶ線分が最短曲線であるが，$\mathbf{R}^m$ から原点を除いたリーマン多様体を考えると，明らかに p とその対蹠点 $-p$ を結ぶ最短曲線は存在しない．あとで明らかにすることであるが，一般にリーマン多様体 M の距離 d_g が完備である (d_g に関する任意のコーシー列は収束する) とき，すべての二点を結ぶ最短曲線が存在し，この逆も正しい．とくに M がコンパクトであるとき，これらが成立する (3.10 節参照)．

さて，二点を結ぶ最短曲線が存在すると仮定して，それが満たすべき必要条件 —— 測地線の方程式 —— を導くことが本節の目標である．変分法の考え方

に従って，与えられた曲線を両端を固定したまま少し変動させたときの汎関数 L の増分 ΔL を計算して，L の "微分 δL" を求める．与えられた曲線 c が最短であれば，δL は c で消えていなければならないからである．

まず，リーマン多様体 M の二点 p, q を結ぶ C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を与え，曲線 c の C^∞ 級**変分**

$$H:\ [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を考える．ここに ε は正数を表し，H は $[a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ から M への C^∞ 級写像で

$$H(t,0) = c(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

を満たすものである．各パラメータ s に対して $c_s(t) = H(t,s)$ とおけば，c を含む C^∞ 級 1 径数曲線族 $\{c_s\}$ を得る．そして曲線 c に沿う C^∞ 級ベクトル場 $t \to V(t) \in T_{c(t)}M$ を次で定める:

$$V(t) = dH_{(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right).$$

この $V(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を，$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ における "曲線 $s \to c_s$" の $s = 0$ における "接ベクトル" とみなし，変分 H から得られる c に沿う**変分ベクトル場**という (図 1.4).

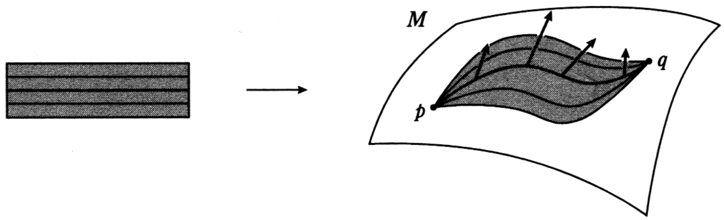


図 1.4

簡単のため，まず 曲線 c がある座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ に含まれていると仮定し，さらに (十分小さな ε を選んでおいて) H の像も U に含まれているとする．また U と $\phi(U)$ を同一視して議論する．U においてリーマン計量 g を $g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ と表し，

$$c^i(t) = x^i(c(t)), \quad h^i(t,s) = x^i(H(t,s)), \quad V(t) = \sum_{i=1}^{m} v^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$$

とおく．このとき

$$v^i = \left(\frac{\partial h^i}{\partial s}\right)(s=0), \qquad \frac{dv^i}{dt} = \left(\frac{\partial^2 h^i}{\partial s \partial t}\right)(s=0)$$

より，テイラー展開を使って，次の評価式を得る:

$$\begin{aligned} h^i(t,s) &= c^i(t) + s v^i(t) + O(s^2), \\ \frac{\partial h^i}{\partial t}(t,s) &= \frac{dc^i}{dt}(t) + s\frac{dv^i}{dt}(t) + O(s^2), \\ g_{ij}(H(t,s)) &= g_{ij}(c(t)) + s\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(c(t))v^k(t) + O(s^2). \end{aligned}$$

これらから次の評価式が得られる:

$$\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(H(t,s))\frac{\partial h^i}{\partial t}\frac{\partial h^j}{\partial t}(t,s) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} + sI(t) + O(s^2). \tag{1.6}$$

ただし $O(s^2)$ は，$s \to 0$ のとき s^2 と同位の無限小を表すランダウの記号，すなわち十分小さい s に対して $O(s^2)/s^2$ が有界となる項を表している．また簡単のため $g_{ij} = g_{ij}(c(t))$, $\partial g_{ij}/\partial x^k = (\partial g_{ij}/\partial x^k)(c(t))$，さらに $g_{ij} = g_{ji}$ に注意して

$$I(t) = 2\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\frac{dc^i}{dt}\frac{dv^j}{dt} + \sum_{i,j,k=1}^{m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt}v^k$$

とおいた．次に

$$g_{ij}\frac{dc^i}{dt}\frac{dv^j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\frac{dc^i}{dt}v^j\right) - g_{ij}\frac{d^2c^i}{dt}v^j - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^k}{dt}v^j$$

を使って，$I(t)$ は

$$I(t) = 2\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\frac{dc^i}{dt}v^j\right) - 2II(t),$$

となる．ただし，

$$II(t) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\frac{d^2c^i}{dt^2}v^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{m}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt}v^k \tag{1.7}$$

とおいた．ここで天下り的ではあるが，行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と表して，m^3 個の関数系 $\{\Gamma^k_{ij}(x) \mid i,j,k = 1,\ldots,m\}$ を次式によって定義する:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m} g^{kh}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right). \tag{1.8}$$

このとき, U 上の C^∞ 級関数系 $\{\Gamma_{ij}^k \mid i,j,k=1,\dots,m\}$ をリーマン計量 g の局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ に関する**クリストッフェルの記号**とよぶ. $\sum_{h=1}^m g^{ih}g_{hj} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) に注意して, $\{\Gamma_{ij}^k\}$ を使って $I\!I(t)$ を表すと,

$$I\!I(t) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}\left(\frac{d^2c^i}{dt^2} + \sum_{k,h=1}^m \Gamma_{kh}^i(c(t))\frac{dc^k}{dt}\frac{dc^h}{dt}\right)v^j$$

となる. 以上の計算から, (1.6) を整理するため, c に沿うベクトル場を

$$\frac{Dc'}{dt} = \sum_{k=1}^m\left(\frac{d^2c^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}\Gamma_{ij}^k(c(t))\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{c(t)} \tag{1.9}$$

と定める. このとき (1.6) は, 次のように整理される:

$$g\left(\frac{dc_s}{dt},\frac{dc_s}{dt}\right) = g\left(\frac{dc}{dt},\frac{dc}{dt}\right) + 2s\left\{\frac{d}{dt}g\left(\frac{dc}{dt},V\right) - g\left(\frac{Dc'}{dt},V\right)\right\} + O(s^2). \tag{1.10}$$

さらに c は定速で, $\|c'\| = \sigma$ (一定) と仮定するならば,

$$B(t) = 2\left\{\frac{d}{dt}g\left(\frac{dc}{dt},V\right) - g\left(\frac{Dc'}{dt},V\right)\right\}$$

とおいて, (1.10) より

$$\begin{aligned}&\left(\left\|\frac{dc_s}{dt}\right\| - \left\|\frac{dc}{dt}\right\| - \frac{B}{2\sigma}s\right)\left(\left\|\frac{dc_s}{dt}\right\| + \left\|\frac{dc}{dt}\right\| + \frac{B}{2\sigma}s\right)\\&= \left\|\frac{dc_s}{dt}\right\|^2 - \left\|\frac{dc}{dt}\right\|^2 - Bs - \frac{B^2}{4\sigma^2}s^2 = O(s^2)\end{aligned}$$

となる. したがって, 十分小さい s に対して,

$$\left(\left\|\frac{dc_s}{dt}\right\| + \left\|\frac{dc}{dt}\right\| + \frac{B}{2\sigma}s\right) \geqq \frac{\sigma}{2}$$

より, 次の評価を得る:

$$\left\|\frac{dc_s}{dt}\right\| = \left\|\frac{dc}{dt}\right\| + \frac{s}{\sigma}\left\{\frac{d}{dt}g\left(\frac{dc}{dt},V\right) - g\left(\frac{Dc'}{dt},V\right)\right\} + O(s^2). \tag{1.11}$$

さらに, (1.11) の両辺を積分することによって,

$$\begin{aligned}L(c_s) &= L(c)\\&\quad + \frac{s(b-a)}{L(c)}\left(g(c'(b),V(b)) - g(c'(a),V(a)) - \int_a^b g\left(\frac{Dc'}{dt},V\right)dt\right)\\&\quad + O(s^2)\end{aligned}$$

を得る．以上から，曲線の長さに関する**第一変分公式**

$$\begin{aligned}&\frac{dL(c_s)}{ds}(s=0)\\&=\frac{(b-a)}{L(c)}\left(g(c'(b),V(b))-g(c'(a),V(a))-\int_a^b g\left(\frac{Dc'}{dt},V\right)dt\right)\end{aligned} \tag{1.12}$$

が導かれた．ここで，曲線 c が一つの座標近傍に含まれていると仮定していたことを思い出そう．したがって Dc'/dt は，局所座標系に依存した形 (1.9) で与えられている．しかし (1.12) においては，これ以外のものは座標系のとり方に依存してはいない．このように Dc'/dt は座標系のとり方によらず定まり，c に沿うベクトル場であることが理解できるであろう．このことは，リーマン計量の座標変換則 (1.3) を使って次に述べるクリストッフェル記号の変換則を導き，それから示すこともできる．

では，クリストッフェル記号の基本的性質を述べよう．

命題 1.3 リーマン計量 g の局所座標系 $(x^1,\ldots,x^m)$ に関するクリストッフェルの記号 $\{\Gamma_{ij}^k \mid i,j,k=1,\ldots,m\}$ は，次の性質 (i), (ii) を満たす．

(i) $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \quad (i,j,k=1,\ldots,m)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{h=1}^m \Gamma_{ki}^h g_{hj}+\Gamma_{kj}^h g_{hi}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (i,j,k=1,\ldots,m).$

さらに，別の局所座標系 $(y^1,\ldots,y^m)$ に関するクリストッフェルの記号を $\{\overline{\Gamma}_{ij}^k\}$ とすると，次の変換則 (iii) が成り立つ:

(iii) $\displaystyle\overline{\Gamma}_{ij}^r=\sum_{h=1}^m\left(\frac{\partial^2 x^h}{\partial y^i\partial y^j}+\sum_{k,\ell=1}^m\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial y^j}\Gamma_{k\ell}^h\right)\frac{\partial y^r}{\partial x^h} \quad (i,j,r=1,\ldots,m).$

命題の証明は読者に計算問題として残しておくが，3.1 節において，これらの意味が明らかになるであろう．

ここで，変分 H が c の両端の点 $p=c(a), q=c(b)$ を固定している場合，つまり

$$H(a,s)=c(a)=p, \quad H(b,s)=c(b)=q \qquad (-\varepsilon<s<\varepsilon)$$

を仮定すると，"$s\to c_s$" は $c_0=c$ となる $\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M;p,q)$ の曲線とみなすことができ，V は $t=a$ および $t=b$ で消えている ($V(a)=0,\ V(b)=0$)．した

がって，(1.12) は次のようになる:

$$\frac{dL(c_s)}{ds}(s=0) = -\frac{(b-a)}{L(c)}\int_a^b g\left(\frac{Dc'}{dt}, V\right)dt.$$

これから次のような考察ができる．

“曲線 c が点 p, q を結ぶ最短の定速曲線ならば，$\Omega_{\mathrm{p.s.}}(M; p, q)$ の c のかってな C^∞ 級変分 $\{c_s|\ c_0 = c\}$ に対しても，$L(c_s)$ は $s=0$ のとき最小値をとるので，その微分 $dL(c_s)/ds(s=0)$ は 0 である．したがって Dc'/dt 自身いたるところ 0 でなければならない.”

逆に，

“Dc'/dt が 0 でないところがあれば，変分ベクトル場が Dc'/dt と同じ方向を向いているように c の変分を適当に選ぶことができて，その変分に対して，$dL(c_s)/ds(s=0) < 0$ となる．したがって，十分小さな正のパラメータ s に対して $L(c_s) < L(c)$ となり，c は最短ではない.”

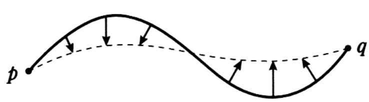


図 1.5

練習問題 1.1 上の考察を確かめよ．(ヒント：曲線が一つの座標近傍に含まれている場合を考える．)

定義 1.2 リーマン多様体 (M, g) の C^∞ 級曲線 $c\colon [a,b] \to M$ が

$$\frac{Dc'}{dt} = 0 \tag{1.13}$$

を満たしているとき，曲線 c を**測地線**とよぶ．座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ を用いて，c が U の中にあるとき $\phi(c(t)) = (c^1(t), \ldots, c^m(t))$ とおいて，上の条件 (1.13) を，次の連立 2 階常微分方程式系として記述することができる:

$$\frac{d^2c^k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(c(t))\frac{dc^i(t)}{dt}\frac{dc^j(t)}{dt} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{1.14}$$

ここに $\{\Gamma_{ij}^k\}$ は，リーマン計量 g の局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に関するクリストッフェル記号である．

常微分方程式の一般論より，M の任意の点 p と接ベクトル $v \in T_pM$ に対して，$c(0)=p$, $c'(0)=v$ となる 0 を含むある開区間で定義された測地線 $c_{p,v}$ が一意的に存在し，$C_{p,v}(t)$ は初期値 p, v に関しても C^∞ 級微分可能であることがわかる．ここで，測地線に関する次の基本的な事柄を説明する．

命題 1.4　リーマン多様体 (M,g) の C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が与えられている．

(1)　c が測地線ならば，そのパラメータは曲線の長さに比例している，つまり速さ $\|c'(t)\|$ は一定である．

さらにパラメータ変換 $t=\eta(s)$ によって得られる曲線 $\widetilde{c}(s)=c(\eta(s))$ に対して，次のことが成り立つ．

(2) $c(t)$ が測地線のとき, $\widetilde{c}(s)$ も測地線であるための必要十分条件は, $\eta''(s)=0$，すなわち $\eta(s)=\alpha s+\beta$ (α, β は定数) となることである．

(3)　区間 $[a,b]$ において $\|c'\|>0$ のとき，適当なパラメータ変換 $t=\eta(s)$ によって得られる曲線 $\widetilde{c}$ が測地線であること，すなわち

$$\frac{D}{ds}\frac{d\widetilde{c}}{ds}=0$$

を満たすための必要十分条件は，Dc'/dt が c の接ベクトル c' に平行であること (一次従属であること)，すなわち，ある関数 $f(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ があって，

$$\frac{Dc'}{dt}=f(t)c'(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

が成り立つことである．

証明　曲線 c が座標近傍 $(U,(x^1,\dots,x^m))$ の中にあるとして示せばよい．g_{ij}, Γ_{ij}^k をそれぞれこの局所座標系に関する g の成分とクリストッフェルの記号とする．さらに $(c^1(t),\dots,c^m(t))$ を $c(t)$ の座標とする．まず (1) については，$g_{ij}=g_{ji}$，(1.7) の $I\!I(t)$ が 0 であることと，そして (1.7) の v^k のところに dc^k/dt を代入したものを使って計算すると，$(d/dt)\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(dc^i/dt)(dc^j/dt)=0$ を導くことができる．

次に (1.14) により，

$$\frac{D}{ds}\frac{d\widetilde{c}}{ds}=\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}+\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)\frac{dc}{dt} \tag{1.15}$$

となる．これから (2) は明らかである．さらに $\widetilde{c}$ が測地線ならば，(1) により，速さ $\|\widetilde{c}'(s)\|=\|\eta'(s)c'(t)\|$ は一定である．したがって，$|\eta'(s)|>0$ かつ $\|c'(t)\|>0$ であ

る．そこで

$$f(t) = -\frac{\eta''(s)}{(\eta'(s))^2}(s = \eta^{-1}(t))$$

とおけば，$Dc'/dt = fc'$ となる．逆にある関数 f に対して，$Dc'/dt = fc'$ が成り立つとし，次の微分方程式の解 η を考える:

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + f(\eta)\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 = 0 \qquad \bigl(\eta(0) \in (a,b),\ |\eta'(0)| \neq 0\bigr).$$

このとき，(1.15) より $\widetilde{c}(s) = c(\eta(s))$ は測地線である． ∎

1.5 曲線のエネルギー

リーマン多様体 (M,g) の C^∞ 級曲線 $c:[a,b] \to M$ のエネルギー $E(c)$ を

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_a^b \|c'(t)\|^2\,dt \quad \left(= \frac{1}{2}\int_a^b g_{c(t)}(c'(t), c'(t))\,dt\right)$$

で定める．このとき，コーシー・シュワルツの不等式によって，

$$L(c)^2 \leqq 2(b-a)E(c)$$

が成り立つ．さらに等号が成り立つのは c が定速のとき，かつそのときに限ることに注意する．また，c がその両端 $p = c(a)$ と $q = c(b)$ を結ぶ最短な定速曲線のとき，p と q をつなぐ任意の C^∞ 級曲線 $\gamma:[a,b] \to M$ に対して，

$$E(c) = \frac{L(c)^2}{2(b-a)} \leqq \frac{L(\gamma)^2}{2(b-a)} \leqq E(\gamma)$$

より，$E(c) \leqq E(\gamma)$ が成り立ち，さらに等号が成り立つのは，γ も p と q を結ぶ最短な定速曲線のときかつそのときに限る．

逆に，c がその両端 $p = c(a)$ と $q = c(b)$ を結ぶエネルギー最小の曲線のとき，c はその二点を結ぶ最短曲線であることも容易に示すことができる．

ここで曲線のエネルギーは，長さと違いそのパラメータのとり方に依存するので注意する．また区分的 C^∞ 級曲線に対しても，長さと同様にそのエネルギーが定まる．

さて $H:[a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を前節での議論と同様に，C^∞ 級曲線 c の C^∞ 級変分とする．$c_s(t) = H(t,s)$ とおくと，評価式 (1.10) により

$$E(c_s) = E(c) + s\biggl(g(c'(b), V(b)) - g(c'(a), V(a)) - \int_a^b g\left(\frac{Dc'}{dt}, V\right)dt\biggr) + O(s^2),$$

したがって，

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) = g(c'(b), V(b)) - g(c'(a), V(a)) - \int_a^b g\left(\frac{Dc'}{dt}, V\right) dt \tag{1.16}$$

を得る．ここで $V(t) = dH_{(t,0)}(\partial/\partial s)$ は変分 H から得られる変分ベクトル場である．(1.16) を，曲線のエネルギーに関する**第一変分公式**という．(1.16) においては，曲線 c は定速であるとは仮定していないことに注意する．

次に，M がユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g_0)$ の m 次元部分多様体の場合を考え，曲線 c に沿うベクトル場 Dc'/dt を $\mathbf{R}^n$ の直交座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ を使って表してみる．まず，$c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t))$，$H(t,s) = (H^1(t,s), \ldots, H^n(t,s))$ と記すと，H が定める変分ベクトル場 $V(t) = dH_{(t,0)}(\partial/\partial s)$ は，

$$V(t) = \left(\frac{\partial H^1}{\partial s}(t,0), \ldots, \frac{\partial H^n}{\partial s}(t,0)\right)$$

と表される．曲線 c_s のエネルギー $E(c_s)$ の変化率を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) &= \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \frac{dc_s}{dt}, \frac{dc_s}{dt} \right\rangle_0 dt\Big)(s=0) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H^i}{\partial t}\right)^2 dt\right)(s=0) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial H^i}{\partial t}(t,0)\frac{\partial^2 H^i}{\partial s \partial t}(t,0)\, dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H^i}{\partial t}\frac{\partial H^i}{\partial s}\right)(t,0) - \frac{\partial^2 H^i}{\partial t^2}(t,0)\frac{\partial H^i}{\partial s}(t,0)\, dt \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H^i}{\partial t}\frac{\partial H^i}{\partial s}\right]_{t=a}^{t=b} - \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial^2 H^i}{\partial t^2}(t,0)\frac{\partial H^i}{\partial s}(t,0)\, dt \\
&= \langle V(b), c'(b)\rangle_0 - \langle V(a), c'(a)\rangle_0 - \int_a^b \langle c''(t), V(t)\rangle_0\, dt
\end{aligned}$$

となる．ここで $V(t)$ は M に接しているので，$\mathbf{R}^n$ のベクトル $c''(t)$ の $T_{c(t)}M$ 成分を $[c'']^T$ と記せば，上の式から

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) = g(c'(b), V(b)) - g(c'(a), V(a)) - \int_a^b g([c'']^T, V(t))\, dt$$

を得る．よって，公式 (1.16) と比較すると

$$\frac{Dc'}{dt} = [c'']^T \tag{1.17}$$

が従う．

▶ **例 13**　(1.17) の応用として，単位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ の測地線を求めてみる．$\mathbf{S}^{n-1}$ の C^∞ 級曲線 c に対して，$\langle c(t), c(t)\rangle_0 = 1$ より両辺を微分して，$\langle c'(t), c(t)\rangle_0 = 0$ を得る．これをさらに微分して

$$\langle c''(t), c(t)\rangle_0 + \langle c'(t), c'(t)\rangle_0 = 0.$$

したがって，

$$c'' = \langle c'', c\rangle c + [c'']^T = -\langle c', c'\rangle c + [c'']^T$$

と表すことができる．ここで c を測地線とすると，$[c'']^T(t) = 0$ より

$$c''(t) + \langle c'(t), c'(t)\rangle_0 c(t) = 0$$

が得られる．測地線は速さが一定なので，ここでは簡単のため，$\langle c'(t), c'(t)\rangle_0 = 1$ として上の方程式を解くと

$$c(t) = (\cos t)\, p + (\sin t)\, v \tag{1.18}$$

となる．ここで $p = c(0) \in \mathbf{S}^{n-1}$, $v = c'(0) \in T_p\mathbf{S}^{n-1}$ とおいた．このように，球面の正規測地線は，直交する二つの単位ベクトル p と v を用いて (1.18) で与えられ，原点をとおる平面との切り口，つまり大円上の定速曲線である (図 1.6).　□

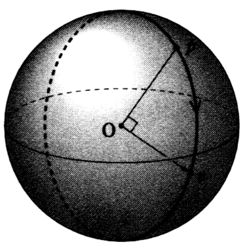


図 1.6

さて，エネルギーの第一変分公式 (1.16) から得られるいくつかの事実を述べよう．

命題 1.5　リーマン多様体 (M, g) の C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が与えら

れている.

(1) c が測地線ならば，c の両端の点 $p = c(a)$ と $q = c(b)$ を固定する任意の c の C^∞ 級変分 $H : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して，

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) = 0 \qquad (c_s(t) = H(t,s))$$

が成り立つ．さらにこの逆も正しい．

(2) c が点 p からでるループ，つまり $c(a) = c(b) = p$ を満たすとする．このとき，c が $c'(a) = c'(b)$ を満たす測地線であるならば，$H(a,s) = H(b,s)$ $(-\varepsilon < s < \varepsilon)$ を満たす c の任意の C^∞ 級変分 $H : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して，

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) = 0 \qquad (c_s(t) = H(t,s))$$

が成り立つ．さらにこの逆も正しい．

(3) N_1, N_2 をそれぞれ M の部分多様体で $c(a) \in N_1, c(b) \in N_2$ とする．c が N_1, N_2 それぞれに直交する測地線であれば，$H(a,s) \in N_1$, $H(b,s) \in N_2$ $(-\varepsilon < s < \varepsilon)$ を満たす c の任意の C^∞ 級変分 $H : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して，

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) = 0 \qquad (c_s(t) = H(t,s))$$

が成り立つ．さらにこの逆も正しい．ここで曲線 c が部分多様体 N と点 $p = c(a) \in N$ で直交するとは，$c'(a) \neq 0$ で，すべての接ベクトル $v \in T_pN$ と直交すること $(g_p(c'(a), v) = 0)$ である．

この命題の (2) において，測地線 $c : [a,b] \to M$ が $c(a) = c(b)$ かつ $c'(a) = c'(b)$ を満たすとき，**閉測地線**という．定義 1.2 の後に述べたことからもわかるように，c は $\mathbf{R}$ 全体で定義された周期的な測地線として拡張できる．

練習問題 1.2　命題 1.5 を証明せよ．(ヒント：一つの座標近傍に曲線と変分が含まれている場合を考える．)

1.6　曲面の測地線

本節では，単純な 2 次元リーマン多様体をとり上げ，その測地線を調べることにする．2 次元リーマン多様体 (M,g) を考え，座標近傍 $(U,(x,y))$ におい

て，その計量 g を次のように表す:

$$g = E(x,y)dx \otimes dx + F(x,y)(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + G(x,y)dy \otimes dy.$$

ここで $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$ とおいて，(1.8) によって与えられる局所座標系 (x,y) に関するクリストッフェルの記号を $\{\Gamma^k_{ij}\}$ とする．開集合 U の中の C^∞ 曲線 $c(t) = (x(t), y(t))$ を考え，曲線 c に沿うベクトル場 Dc'/dt を次式で表す:

$$\frac{Dc'}{dt} = \left(x''(t) + \Theta_1(x'(t), y'(t))\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{c(t)} + \left(y''(t) + \Theta_2(x'(t), y'(t))\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{c(t)}.$$

ただし，

$$\Theta_1(x'(t), y'(t)) = x'(t)^2\Gamma^1_{11}(c(t)) + 2x'(t)y'(t)\Gamma^1_{12}(c(t)) + y'(t)^2\Gamma^1_{22}(c(t)),$$

$$\Theta_2(x'(t), y'(t)) = x'(t)^2\Gamma^2_{11}(c(t)) + 2x'(t)y'(t)\Gamma^2_{12}(c(t)) + y'(t)^2\Gamma^2_{22}(c(t))$$

とおいた．

さて，$Dc'/dt = 0$ を満たす曲線が測地線である．また Dc'/dt が c' に平行である (一次従属である) とき，適当なパラメータ変換によって測地線が得られる．このような場合に，曲線を “プレ測地線” と本書ではよぶことにする．

以下では，$F = 0$ かつ E と G が変数 y のみの関数である場合，つまり次のような特別の形をした計量を考え，そのプレ測地線を求めよう:

$$g = E(y)\,dx \otimes dx + G(y)\,dy \otimes dy.$$

まずクリストッフェルの記号は，次のように与えられる:

$$\Gamma^1_{12} = \frac{E'(y)}{2E(y)}, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{E'(y)}{2G(y)}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{G'(y)}{2G(y)},$$
$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0.$$

したがって，測地線の方程式は次式で与えられる:

$$x''(t) + \frac{E'(y(t))}{E(y(t))}x'(t)y'(t) = 0, \tag{1.19}$$

$$y''(t) - \frac{E'(y(t))}{2G(y(t))}x'(t)^2 + \frac{G'(y(t))}{2G(y(t))}y'(t)^2 = 0. \tag{1.20}$$

これから次の (1), (2) が成り立つ．

(1) a を定数として $c(t)=(a,y(t))$ は，次のように $y'(t)\neq 0$ のときプレ測地線である:

$$\frac{Dc'}{dt}=\left(y''(t)+\frac{G'(y(t))}{2G(y(t))}y'(t)^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{c(t)}$$
$$=\frac{1}{y'(t)}\left(y''(t)+\frac{G'(y(t))}{2G(y(t))}y'(t)^2\right)c'(t).$$

(2) a を定数として $c(t)=(x(t),a)$ を考える．$x'(t)\neq 0$ のとき，次のように c がプレ測地線となる必要十分条件は $E'(a)=0$ となることである:

$$\frac{Dc'}{dt}=x''(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{c(t)}-\frac{E'(a)}{2G(a)}x'(t)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{c(t)},$$
$$c'(t)=x'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{c(t)}.$$

次に，上の二つの場合 (1), (2) 以外の (プレ) 測地線を求める．$(E(y(t))x'(t))'=0$ が方程式 (1.19) と同等な条件となるので，c が測地線であるならば，$E(y(t))x'(t)=g(c'(t),x'(t)(\partial/\partial x)_{c(t)})$ は定数 b である．すなわち

$$E(y(t))x'(t)=b \tag{1.21}$$

となる．$b=0$ ならば，上の (1) の場合にあたるので，以下 $b\neq 0$ とする．さらに測地線 c は正規，すなわち単位の速さであるとする．このとき $E(y)(x')^2+G(y)(y')^2=1$ より，$y(t)$ は次の方程式を満たす:

$$y'(t)^2=\frac{E(y(t))-b^2}{E(y(t))G(y(t))}. \tag{1.22}$$

逆に単位の速さの曲線 c が，方程式 (1.21) と (1.22) を満たしているとする．このとき (1.21) を微分して (1.19) が導かれ，さらに $G(y)(y')^2=1-E(y)(x')^2$ の両辺を微分すると，

$$G'(y)y'(t)^3+2G(y)y'(t)y''(t)=-E'(y)y'(t)x'(t)^2-2E(y)x'(t)x''(t),$$

ここで (1.19) を使うと，

$$G'(y)y'(t)^3+2G(y)y'(t)y''(t)=E'(y)y'(t)x'(t)^2$$

となる．したがって $y'\neq 0$ のとき，この両辺を $2G(y)y'$ で割って整理すると，

$$y''(t)-\frac{E(y)}{2G(y)}x'(t)^2+\frac{G'(y)}{2G(y)}y'(t)^2=0$$

となり，(1.20) が導かれる．

さて曲線 $c(t)=(x(t),y(x(t)))$ が測地線のとき，x の関数 $y(x)$ は，方程式 (1.21) と (1.22) から，次の方程式を満たすことがわかる:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{E(y)}\sqrt{E(y)-b^2}}{b\sqrt{G(y)}}. \tag{1.23}$$

逆に，これを満たす曲線 $\widetilde{c}(x)=(x,y(x))$ が与えられているとする．方程式

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{E(y(x))+G(y(x))(dy/dx)^2}=\frac{b^2}{E(y(x))^2}$$

の解を $x(t)$ とすると，明らかに $E(y)x'(t)=\pm b$ となる．したがって $E(y(x))\neq b^2$ ならば (1.22) が得られ，曲線 $c(t)=\widetilde{c}(x(t))$ は単位の速さの測地線である．

▶ 例 14 上半平面 $\mathbf{R}^2_+=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y>0\}$ 上のリーマン計量

$$g_P=\frac{1}{y^2}(dx\otimes dx+dy\otimes dy)$$

を考える．この計量 g_P を **ポアンカレ計量**という．このとき，g_P の測地線を求めてみよう．ま ず方程式 (1.23) は，次のようになる:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{b}\sqrt{\frac{1}{y^2}-b^2}.$$

したがって

$$\frac{dy}{\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-b^2}}=\pm\frac{dx}{b},\quad \text{これを解いて,}\quad -\frac{y}{b^2}\sqrt{\frac{1}{y^2}-b^2}=\pm\frac{1}{b}(x-a).$$

ここで a は定数である．以上から

$$(x-a)^2+y^2=\frac{1}{b^2}\qquad(y>0)$$

となる．また半直線 $\{(a,y)\,|\,y>0\}$ もプレ測地線であるから，結局，ポアンカレ計量 g_P の測地線の軌跡は，x 軸に直交する円周の上半分，あるいは y 軸に平行な半直線であることがわかる． □

次に，$\mathbf{R}\times[0,\infty)$ を含む開集合において与えられているリーマン計量

$$g=E(y)\,dx\otimes dx+G(y)\,dy\otimes dy$$

の測地線について考察する．$b^2<E(0)$ を満たす正数 b に対して，初期条件 $y(0)=0$ を満たす方程式 (1.23) の解 $y(x)$ を考える (なお，任意の定数 d に対して，$\widetilde{y}(x)=y(x-d)$ あるいは $\widetilde{y}(x)=y(-x+d)$ とおけば，$\widetilde{y}(d)=0$ を満

たす解が得られることに注意しておく).

まず,

$$\xi(u) = \int_0^u \frac{b\sqrt{G(s)}}{\sqrt{E(s)}\sqrt{E(s)-b^2}}\,ds$$

とおいて,次のように三つの場合 (1), (2), (3) に分けて考える.

(1) $E(y) > b^2$ $(0 \leqq y < \infty)$ とする.この場合,$\xi(u)$ は $[0,\infty)$ 全体で定義され,$\xi(\infty) = \lim_{u\to\infty} \xi(u)$ $(\leqq +\infty)$ とおくと,解 $y(x) = \xi^{-1}(x)$ は $[0, \xi(\infty))$ において定義される.$x \to \xi(\infty)$ のとき,$y(x)$ は単調に増加しながら無限大に発散する.

(2) ある正数 a があって,$E(y) > b^2$ $(0 \leqq y < a)$,$E(a) = b^2$,そして $E'(a) = 0$ とする.この場合,ξ は区間 $[0, a)$ において定義され,$\lim_{u\to a} \xi(u) = +\infty$ である.よって解 $y(x) = \xi^{-1}(x)$ は $[0,\infty)$ において定義され,$x \to \infty$ のとき単調に a に収束し,したがってプレ測地線 $\{(x,a)\,|\,x \in \mathbf{R}\}$ に近づいていく.

(3) ある正数 a があって,$E(y) > b^2$ $(0 \leqq y < a)$, $E(a) = b^2$, そして $E'(a) \neq 0$ とする.この場合,ξ は閉区間 $[0, a]$ で定義され,$[0, 2\xi(a)]$ 上の解 $y(x)$ が

$$y(x) = \begin{cases} \xi^{-1}(x) & (0 \leqq x \leqq \xi(a)) \\ \xi^{-1}(2\xi(a) - x) & (\xi(a) \leqq x \leqq 2\xi(a)) \end{cases}$$

によって与えられる.

さて $E(y)$,$G(y)$ は変数 x に依存しないので,任意の定数 d に対して,x 軸に平行に滑らせる移動 $\tau_d(x,y) = (x-d, y)$,あるいは直線 $x = d$ に関する折り返し $R_d(x,y) = (-x+2d, y)$ に関して不変である.すなわち $\tau_d^* g = g$, $R_d^* g = g$ となる (第 2 章で説明する用語を用いれば,τ_d と R_d は g の等長変換である).これからリーマン計量 g は,$\mathbf{S}^1 \times [0,\infty)$ を含むシリンダー $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} = \{(\cos x, \sin x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ の開集合において与えられていると考えることができる.このとき,$\mathbf{S}^1$ の点 p に対して,$c_p(y) = (p, y)$ $(y \in \mathbf{R})$ はプレ測地線となる.また $E'(a) = 0$ ならば,$\widetilde{c}_a(x) = (\cos x, \sin x, a)$ もプレ測地線で閉曲線となっている.

(1) の $\xi(\infty) = +\infty$ の場合は,プレ測地線 $y(x)$ は回転しながら無限遠方に遠ざかっていき,$\xi(\infty) < +\infty$ のときは,高々有限の回転で,あるプレ測地線

c_p に近づきながら無限遠方に遠ざかっていく．また，(2) の場合は，プレ測地線 $y(x)$ は回転しながら閉測地線 $\widetilde{c}_a$ に収束し，(3) の場合は，$\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ にもどる (図 1.7).

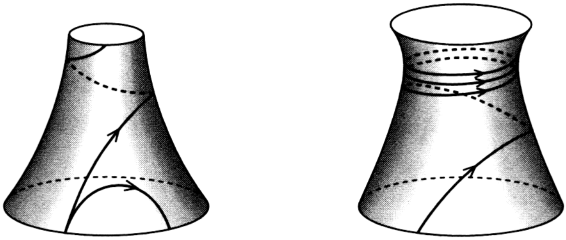


図 1.7

1.7 リーマン測度

多様体 M 上の関数 f に対して，$\{p \in M \,|\, f(p) \neq 0\}$ の閉包を f の**台**といい，$\operatorname{supp} f$ と記す．台がコンパクトな連続関数全体のなすベクトル空間を $C_0(M)$ で表す．本節では，リーマン計量を用いて $C_0(M)$ の各関数に対してその積分を定義し，その基本的性質を述べる．次に，C^∞ 級関数の勾配ベクトル場とベクトル場の発散を定義して，基礎的な積分公式を示す．

1.7.1 リーマン測度

m 次元リーマン多様体 M 上の台がコンパクトな連続関数 f に対して，その積分 $\displaystyle\int_M f\,dv_g$ を定義することからはじめる．まず f の台がある座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ に含まれているとき，

$$\int_M f\,d\mu_g = \int_{\phi(U)} \left(f\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} \right) \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^m)\, dx^1 \cdots dx^m$$

と定義する．ここで $\det\bigl(g_{ij}\bigr)$ は，局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に関するリーマン計量 g の成分のなす m 次正方行列 $\bigl(g_{ij}\bigr)$ の行列式で，$\phi(U)$ 上の正値 C^∞ 級関数である．この定義の右辺の積分の値は，次のように局所座標系のとり方によらないことに注意する．$\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ を別の局所座標系とし，これに関

する g の成分を $\overline{g}_{ij}$ と表すと，変換則 (1.3) により，

$$\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} = \left|\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\right| \sqrt{\det\left(\overline{g}_{ij}\right)}$$

が成り立つ．したがって，多変数関数の積分の変換公式を適用して，

$$\int_{\phi(U)} \left(f\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right) \circ \phi^{-1}(x^1,\ldots,x^m)\,dx^1\cdots dx^m$$
$$= \int_{\psi(U)} \left(f\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right) \circ \psi^{-1}(y^1,\ldots,y^m)\,dy^1\cdots dy^m$$

となる．

一般の $f \in C_0(M)$ に対してその積分を定義するために，局所有限な座標近傍の族 $\{U_k \mid k \in K\}$ で，M を被覆するもの $(M = \bigcup_k U_k)$ をとり，さらにそれに従属する単位の分解を $\{\rho_k\}$ とする．$\rho_k f$ の台は座標近傍 U_k に含まれ，かつ $\rho_k f$ は有限個の k を除いて 0 であるから，$f = \sum_k \rho_k f$ と表すことができる．したがって，

$$\int_M f\ d\mu_g = \sum_k \int_M \rho_k f\ d\mu_g$$

と定義することができる．これは単位の分解のとり方によらない．なぜならば，M を被覆する別の局所有限な座標近傍の系 $\{V_\ell \mid \ell \in L\}$ とそれに従属する単位の分解 $\{\xi_\ell\}$ に対して，

$$\int_M f\ d\mu_g = \sum_k \int_M \rho_k f\ d\mu_g = \sum_k \sum_\ell \int_M \xi_\ell \rho_k f\ d\mu_g$$
$$= \sum_\ell \sum_k \int_M \rho_k \xi_\ell f\ d\mu_g = \sum_\ell \int_M \xi_\ell f\ d\mu_g$$

となるからである．

明らかに，積分

$$f \in C_0(M) \to \int_M f\,d\mu_g \in \mathbf{R}$$

は，次の二つの性質 (i), (ii) を満たす．

(i) (線形性)

$$\int_M (\alpha f+\beta h)\,d\mu_g = \alpha\int_M f\,d\mu_g + \beta\int_M h\,d\mu_g \quad (\alpha,\beta \in \mathbf{R},\ f,h \in C_0(M))$$

(ii) (非負値性) $f \geqq 0$ ならば，

$$\int_M f\,d\mu_g \geqq 0.$$

さて，M の開集合 U に対して，

$$\mu_g(U) = \sup\left\{\int_M f\,d\mu_g \;\middle|\; 0 \leqq f \leqq 1,\ \mathrm{supp}\, f \subset U\right\} \quad (\leqq +\infty)$$

とおく．また M の閉集合 K に対して，

$$\mu_g(K) = \inf\{\mu_g(U) \mid U \text{ は } K \text{ を含む開集合}\} \quad (\leqq +\infty)$$

とおく．さらに積分論の一般論より，可測集合の族とその上の測度 (リーマン計量から決まることから**リーマン測度**とよぶ)，可測関数，可積分関数等が定義されるが，詳細は省略する．開集合，可算個の開集合の共通部分，したがって閉集合などは可測集合であるが，任意の可測集合 A に対して，そのリーマン測度の値は，

$$\begin{aligned}\mu_g(A) &= \inf\{\mu_g(U) \mid U \text{ は } K \text{ を含む開集合}\} \\ &= \sup\{\mu_g(K) \mid K \text{ は } A \text{ に含まれるコンパクト集合}\} \quad (\in [0, +\infty])\end{aligned}$$

によって与えられる．$\mu_g(A) = \int_A d\mu_g$ あるいは $\mu_g(A) = \int_M I_A\,d\mu_g$ と表してもよい．ただし，I_A は可測集合 A の特性関数 ($p \in A$ に対して $I_A(p) = 1$, $p \in M \setminus A$ に対して $I_A(p) = 0$) を表す．$\mu_g(A)$ が有限のとき，その値を A の (リーマン計量 g に関する) m 次元**体積**とよぶ．ただし，$m = 2$ のときは面積，$m = 1$ のときは長さという．

▶ **例 15**　3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ において，xy 平面の開集合 U 上の C^∞ 級関数 $h(x, y)$ のグラフとなっている曲面

$$M = \{(x, y, z) \mid z = h(x, y),\ (x, y) \in U\}$$

の場合，誘導計量 g を局所座標系 (x, y) を用いて表すと，

$$\begin{aligned}g = &\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) dx \otimes dx + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \\ &+ \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right) dy \otimes dy\end{aligned}$$

より，M の面積は

$$\mu_g(M) = \int_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

によって与えられる． □

練習問題 1.3 (1) M のコンパクト集合 K に対して，$\mu_g(K)$ は有限の値であることを示せ．

(2) $\mu_g(A)=0$ のとき，可測集合 A を零集合という．零集合の高々可算個の和集合や k 次元部分多様体 $(k<m)$ は零集合であることを示せ．また，あるリーマン計量に関して零集合であるとすれば，他の任意のリーマン計量に対しても零集合であることを示せ．

1.7.2 関数の勾配とベクトル場の発散

リーマン多様体 (M,g) 上の C^∞ 級関数の勾配ベクトル場を定義し，次にベクトル場の発散を説明する．

M 上の C^∞ 級関数 f を考える．各点 p に対して，

$$df_p(v)=g_p(x,v) \qquad (\forall v\in T_pM)$$

を満たす接ベクトル x がただ一つ決まる．これを点 p における関数 f の**勾配**あるいは**グラディエント**とよび，$(\operatorname{grad} f)_p$ と表す．これによって，M 上のベクトル場 $\operatorname{grad} f$ が定まる．$(\operatorname{grad} f)_p$ は，点 p において f がもっとも大きく変化する方向を表している．すなわち，

$$\|\operatorname{grad} f\|(p)=\max\{df_p(v)\mid v\in T_pM,\ \|v\|=1\}=df_p\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}\right)$$

(ここで 2 番目の等号においては，$(\operatorname{grad} f)_p\neq 0$ とする)．ここで，点 p が f の正則点のとき，f のレベル集合 $L=\{q\in M\mid f(q)=f(p)\}$ は点 p の近傍で超曲面となっているが，$(\operatorname{grad} f)_p$ と L の接空間 T_pL は直交している．すなわち

$$T_pL=\{v\in T_pM\mid df_p(v)=g_p(\operatorname{grad} f,v)=0\}.$$

また M の座標近傍 $(U,\phi=(x^1,\dots,x^m))$ において，$\operatorname{grad} f$ は次のように局所表示される:

$$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^m g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

ただし，g^{ij} は g の成分のなす行列 $\left(g_{ij}\right)$ の逆行列の (i,j) 成分を表す．

さて，C^∞ 級関数 f にその勾配ベクトル場を対応させる規則 $f\to\operatorname{grad} f$ に関して，次の (i), (ii) を確かめるのは容易であろう．定数 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ と関数

$f, h \in C^\infty(M)$ に対して，

(i) $\operatorname{grad}(\alpha f + \beta h) = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} h$,

(ii) $\operatorname{grad}(fh) = h \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} h$.

さらに $f \in C^\infty(M)$ とその値域を含む $\mathbf{R}$ のある開区間上の C^∞ 級関数 η との合成関数 $\eta(f)$ に対して，

(iii) $\operatorname{grad} \eta(f) = \eta'(f) \operatorname{grad} f$.

次に M 上のベクトル場に対して，その発散とよばれる C^∞ 級関数を定義する．X をベクトル場とする．台がコンパクトである任意の C^∞ 級関数 f に対して，

$$\int_M g(\operatorname{grad} f, X)\, d\mu_g = -\int_M f \operatorname{div} X\, d\mu_g \tag{1.24}$$

が成り立つような C^∞ 級関数 $\operatorname{div} X$ がただ一つ決まる．この関数を，ベクトル場 X の**発散**という．これを確かめるために，座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ を考え，f の台が U に含まれているとする．$X = \sum_{i=1}^m X^i(\partial/\partial x^i)$，$G = \det\left(g_{ij}\right)$ とおく．U と $\phi(U)$ を同一視して，(1.24) の左辺をこの局所座標系を使って表すと，

$$\begin{aligned}
&\int_M g(\operatorname{grad} f, X)\, d\mu_g \\
&\quad = \int_M X(f)\, d\mu_g = \int_U \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i \sqrt{G}\; dx^1 \cdots dx^m \\
&\quad = \int_U \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(f X^i \sqrt{G}) - f \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{G}) \right) dx^1 \cdots dx^m.
\end{aligned}$$

ここで累次積分を実行する．f の台が U に含まれていることから

$$\sum_{i=1}^m \int_U \frac{\partial}{\partial x^i}(f X^i \sqrt{G})\; dx^1 \cdots dx^m = 0$$

となる．したがって

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} X^i)$$

と定義すると，(1.24) が台が U に含まれるような C^∞ 級関数すべてに対して成り立つことがわかる．このことからも，あるいは座標変換則を使っての直接の計算からもわかるように，$\operatorname{div} X$ は局所座標系のとり方によらずに決まり，M 上の C^∞ 級関数を定める．さらに M 上の台がコンパクトな任意の C^∞ 級

関数に対しても (1.24) が成立することをみるために，座標近傍 (U_k, ϕ_k) からなる M の局所有限な開被覆 $\{U_k\}$ をとり，それに従属する単位の分解 $\{\rho_k\}$ を使って，$f \in C^\infty(M)$ に対して $f = \sum_k f_k$ $(f_k = \rho_k f)$ とおく．f の台がコンパクトのとき，自明でない f_k は有限個であるから，

$$\begin{aligned}\int_M g(\operatorname{grad} f, X)\, d\mu_g &= \sum_k \int_M g(\operatorname{grad} f_k, X)\, d\mu_g \\ &= -\sum_k \int_M f_k \operatorname{div} X\, d\mu_g = -\int_M f \operatorname{div} X\, d\mu_g.\end{aligned}$$

このようにして (1.24) が確かめられたが，ここで (1.24) をベクトル場 X の流れ $\{\phi_t\}$ の視点からみてみると，

$$\begin{aligned}\int_M f \operatorname{div} X\, d\mu_g &= -\int_M X(f)\, d\mu_g \\ &= -\int_M \frac{d}{dt} f(\phi_t(p))(t=0)\, d\mu_g(p) \\ &= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_M f(\phi_t)\, d\mu_g - \int_M f\, d\mu_g\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_M f(\phi_{-t})\, d\mu_g - \int_M f\, d\mu_g\right).\end{aligned}$$

このように，ベクトル場の発散は，その流れによる関数の積分の変化率を表し，無限小の視点からみると，流れによる体積密度 $\sqrt{G}\, dx^1 \cdots dx^m$ の変化率を表している．

さて，ベクトル場にその発散を対応させる規則 $X \to \operatorname{div} X$ の満たす基本的性質 (iv), (v) を述べておこう．$X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して，

(iv) $\operatorname{div}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \operatorname{div} X + \beta \operatorname{div} Y$,

(v) $\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div} X$.

1.7.3 グリーンの定理

(1.24) において，ベクトル場 X の台 $\operatorname{supp} X = \overline{\{p \in M \mid X_p \neq 0\}}$ がコンパクトであるときは，関数 f の台がコンパクトである必要はない．したがって $f = 1$ として，

$$\int_M \operatorname{div} X\, d\mu_g = 0 \qquad (\operatorname{supp} X \text{ はコンパクト}).$$

となる．しかし (1.24) において，積分範囲を M のコンパクト集合に置き換えることはできない．このときには，(1.24) の両辺は一般には等しくない．ここではこの問題について考えてみる．

M の領域 (連結開集合) A に対して，ある C^∞ 級関数 ρ があって，$A = \{p \in M \mid \rho(p) \leqq 0\}$ と表すことができ，さらに $\rho(p) = 0$ となる各点 p において，勾配 $(\mathrm{grad}\, f)_p$ は 0 ではないという条件が満たされているとする．このとき A の境界 bA は，その定義関数 ρ の零点集合 $\{p \in M \mid \rho(p) = 0\}$ として与えられ，M の超曲面，つまり M に埋め込まれた $(m-1)$ 次元部分多様体になる．このような領域 A を "滑らかな境界をもつ領域" と本書ではよぶことにする．

さらに $\mathrm{grad}\, \rho$ は bA を含むある開集合において 0 にならないので，その開集合において，$\mathrm{grad}\, \rho / \|\mathrm{grad}\, \rho\|$ は単位の長さのベクトル場を定める．このベクトル場を bA に制限したものを bA の外向き**単位法ベクトル場**とよび，ν_{bA} と記す．この ν_{bA} は bA の各点 p において，境界 bA の接空間 $T_p(bA)$ と直交している単位ベクトル場で，定義関数 ρ のとり方によらずに決まる．

さて次に述べる定理 —— **グリーンの定理** —— は，リーマン多様体の幾何，および解析の基礎となるものである．

定理 1.6 リーマン多様体 (M, g) のコンパクトな滑らかな境界をもつ領域 A と，それを含むある開集合において定義されたベクトル場 X に対して，

$$\int_A \mathrm{div}\, X \, d\mu_g = \int_{bA} g(X, \nu_{bA})\, d\mu_h$$

が成り立つ．ここで右辺は境界 bA の誘導計量 h に関する積分を表す．

証明 定理の証明は少し長いので二つのステップに分けて行う．

ステップ 1 bA の近傍を定義関数のレベル集合と勾配ベクトル場の方向に直交分解して，これに関する累次積分を実行する．まず滑らかな境界をもつ領域 A の定義関数の一つを ρ とする．各 t に対して，$\rho(p) = t$ となる点 p 全体 (ρ のレベル集合) を $L(t)$ で表す．さらに $L_\alpha^\beta = \bigcup\{L(t) \mid \alpha < t < \beta\}$ とおく．滑らかな境界をもつ領域の定義と境界 bA がコンパクトであることより，0 を含む適当な開区間 (α, β) があって，L_α^β において $\mathrm{grad}\, \rho$ は 0 になることはない．そこで L_α^β 上のベクトル場 $\mathrm{grad}\, \rho / \|\mathrm{grad}\, \rho\|^2$ と，境界 bA の各点 p に対して，$c_p(0) = p$ を満たすこのベクトル場の積分曲線 c_p を考える．このとき，

$$\frac{d}{dt}\rho(c_p(t)) = d\rho(c_p{}'(t)) = g\left(\mathrm{grad}\, \rho, \frac{\mathrm{grad}\, \rho}{\|\mathrm{grad}\, \rho\|^2}\right) = 1$$

となる．したがって，$\rho(c_p(t)) = t$ $(\alpha < t < \beta,\ p \in bA)$ となる．このことから，直積多様体 $(\alpha, \beta) \times bA$ から M への写像 F を $F(t,p) = c_p(t)$ によって定義すれば，F は $(\alpha, \beta) \times bA$ から L_α^β の上への微分同相写像で，$\{t\} \times bA$ を $L(t)$ に移し，

$$df_{(t,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = {c_p}'(t) = \frac{\operatorname{grad}\rho}{\|\operatorname{grad}\rho\|^2}(F(t,p))$$

が成り立つ．ここで $L(t)$ と $\operatorname{grad}\rho$ は直交していること，すなわち，$L(t)$ の各点 q において，

$$T_qM = \{\operatorname{grad}\rho\}_{\mathbf{R}} + T_qL(t) \qquad (\{\operatorname{grad}\rho\}_{\mathbf{R}} = \{s \operatorname{grad}\rho \mid s \in \mathbf{R}\})$$

と直交分解できるということ，$g({c_p}'(t), {c_p}'(t)) = 1/\|\operatorname{grad}\rho\|^2$ に注意する．

これから，L_α^β に台が含まれている連続関数 f に対して，

$$\int_{L_\alpha^\beta} f\,\|\operatorname{grad}\rho\|\,d\mu_g = \int_\alpha^\beta \left(\int_{L(t)} f\,d\mu_{h_t}\right) dt \tag{1.25}$$

が成り立つ．ただし h_t は $L(t)$ の誘導計量を表す．

ここで $\phi = (x^2, \ldots, x^m)$ を bA の開集合 V 上の局所座標系とすると，$\phi = (x^1, x^2, \ldots, x^m)$ $(x^1 = t)$ が $(\alpha, \beta) \times V$ 上の局所座標系を与え，したがって $F((\alpha, \beta) \times V)$ 上の局所座標系を与える．簡単のために，ここでは，$F((\alpha, \beta) \times V)$，$(\alpha, \beta) \times V$，および $(\alpha, \beta) \times \phi(V)$ をこの座標系を使って同一視して考え，計量 g を局所表示すると，

$$g = \frac{1}{\|\operatorname{grad}\rho\|^2} dt \otimes dt + \sum_{i,j=2}^m g_{ij}(t,p) dx^i \otimes dx^j$$

となる．ここで $\sum_{i,j=2}^m g_{ij}(t,p) dx^i \otimes dx^j$ が $L(t)$ 上のリーマン計量 h_t の局所表示である．よって

$$G(t,p) = \det\left(g_{ij}(t,p)\right)_{1 \leqq i,j \leqq m}, \qquad H_t(p) = \det\left(g_{ij}(t,p)\right)_{2 \leqq i,j \leqq m}$$

とおいて，

$$G = \frac{H_t}{\|\operatorname{grad}\rho\|^2}$$

となる．したがって，$F((\alpha, \beta) \times V)$ に台が含まれる連続関数 f に対して，

$$\begin{aligned}
\int_{L_\alpha^\beta} f\|\operatorname{grad}\rho\|\ d\mu_g &= \int_{(\alpha,\beta)\times\phi(V)} f\,\|\operatorname{grad}\rho\|\sqrt{G}\ dx^1 \cdots dx^m \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\int_{\phi(V)} f\sqrt{H_t}\ dx^2 \cdots dx^m\right) dt \\
&= \int_\alpha^\beta \left(\int_{L(t)} f\ d\mu_{h_t}\right) dt.
\end{aligned}$$

一般の場合には，bA を有限個の座標近傍で被覆して，それに従属する単位の分解 $\{\rho_k\}$ を使って $f = \sum_k f_k$ $(f_k = \rho_k f)$ と表し，上の結果を適用すればよい．

ステップ 2 まず準備として，正数 ε に対して，次のような区分的に C^∞ 級関数 $\eta_\varepsilon(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ を用意する:

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & (t \leqq -\varepsilon) \\ -\dfrac{t}{\varepsilon} & (-\varepsilon \leqq t \leqq 0) \\ 0 & (0 \leqq t). \end{cases}$$

次に $10\delta < \varepsilon$ となる正数 δ をとり，次のような C^∞ 級関数 $\eta_{\varepsilon,\delta}(t)$ を用意する:

$$\eta_{\varepsilon,\delta}(t) = \begin{cases} 1 & (t \leqq -\varepsilon - 2\delta) \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}(t+\delta) & (-\varepsilon \leqq t \leqq -2\delta) \\ 0 & (0 \leqq t). \end{cases}$$

ただし ε を固定して $\delta \to 0$ とするとき，$t = -\varepsilon$ および $t = 0$ 以外の t に対して，$\eta_{\varepsilon,\delta}(t)$ および $\eta_{\varepsilon,\delta}{}'(t)$ は，それぞれ $\eta_\varepsilon(t)$ および $\eta_\varepsilon{}'(t)$ に収束するようにしておく．これらの準備のもとに，(1.24) を使って求める等式を示す．

滑らかな境界をもつ領域 A の定義関数 ρ を一つ選び，ステップ 1 と同じ記号を使う．ρ と $\eta_{\varepsilon,\delta}$ の合成関数を考え，これに (1.24) を適用すると，

$$\begin{aligned}\int_M \eta_{\varepsilon,\delta}(\rho)\,\mathrm{div}\,X\,d\mu_g &= -\int_M g(\mathrm{grad}\,\eta_{\varepsilon,\delta}(\rho), X)\,d\mu_g \\ &= -\int_M \eta_{\varepsilon,\delta}{}'(\rho) g(\mathrm{grad}\,\rho, X)\,d\mu_g\end{aligned}$$

となる．ここで ε を十分小さく選んでおいて，$\eta_{\varepsilon,\delta}(\rho)$ の台は L_α^β に含まれていることに注意して，(1.25) を使うと，

$$\begin{aligned}&\int_M \eta_{\varepsilon,\delta}(\rho)\mathrm{div}\,X\,d\mu_g \\ &= -\int_{L^0_{-\varepsilon-2\delta}} \eta_{\varepsilon,\delta}{}'(\rho) g\left(\frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\|\mathrm{grad}\,\rho\|}, X\right) \|\mathrm{grad}\,\rho\|\,d\mu_g \\ &= -\int_{-\varepsilon-2\delta}^0 \eta_{\varepsilon-2\delta}{}'(t) \left(\int_{L(t)} g\left(\frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\|\mathrm{grad}\,\rho\|}, X\right) d\mu_{h_t}\right) dt\end{aligned}$$

となる．ここで $\delta \to 0$ とすると，

$$\int_M \eta_\varepsilon(\rho)\mathrm{div}\,X\,d\mu_g = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^0 \left(\int_{L(t)} g\left(\frac{\mathrm{grad}\,\rho}{\|\mathrm{grad}\,\rho\|}, X\right) d\mu_{h_t}\right) dt$$

となり，さらに $\varepsilon \to 0$ として，

$$\int_M I_A\,\mathrm{div}\,X\,d\mu_g = \int_{bA} g(\nu_{bA}, X)\,d\mu_h.$$

これで定理の証明が完了した． ∎

注意 (1.25) は，リーマン多様体上の余積公式の特別な場合である．この基本的な公式については，たとえば [8] を参照してほしい．

定理 1.6 と 1.7.2 項の等式 (v) より，次の結果がただちに得られる．

系 1.7 リーマン多様体 (M, g) のコンパクトで滑らかな境界をもつ領域 A とそれを含むある開集合において定義されたベクトル場 X，および C^∞ 級関数 f に対して，

$$\int_A (X(f) + f \operatorname{div} X)\, d\mu_g = \int_{bA} f g(\nu_{bA}, X)\, d\mu_h$$

が成り立つ．

例題 1.8 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の与えられた m 次元ベクトル空間 V において，対称線形変換 $\psi : V \to V$ のトレース $\operatorname{trace}\psi$ は，次のように与えられる:

$$\operatorname{trace}\psi = \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbf{S}} \langle \psi(v), v\rangle\ d\mu_{g_1}.$$

ただし，$\mathbf{S}$ は V の単位球面 $\{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ を，ω_{m-1} は (内積から決まる誘導計量 g_1 に関する) $\mathbf{S}$ の $(m-1)$ 次元体積を，μ_{g_1} は $\mathbf{S}$ 上のリーマン測度をそれぞれ表す．

証明 V の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を $\psi(e_i) = \lambda_i e_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たすように選ぶ．すなわち λ_i は ψ の固有値で，e_i は λ_i に属する単位固有ベクトルである．対応 $\sum_{i=1}^m x^i e_i \in V \Longleftrightarrow (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbf{R}^m$ によって $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ とユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ を同一視して考えると，$\mathbf{R}^m$ 上のベクトル場 $X = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i (\partial/\partial x^i)$ に対して，

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m \lambda_i = \operatorname{trace}\psi$$

となる．したがって，単位球体 $\mathbf{B}$ において，定理 1.6 の発散公式を適用して，

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}\psi &= \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbf{B}} \operatorname{div} V\, dx^1 \cdots dx^m \\ &= \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbf{S}} \langle \nu_{\mathbf{S}}, V\rangle\, d\mu_{g_1} \\ &= \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbf{S}} \sum_{i=1}^m \lambda_i (x^i)^2\ d\mu_{g_1} \\ &= \frac{m}{\omega_{m-1}} \int_{\mathbf{S}} \langle \psi(v), v\rangle\, d\mu_{g_1}.\end{aligned}$$

∎

2章 等長変換

2.1 ユークリッド空間と球面

二つのリーマン多様体 $M = (M, g)$ と $N = (N, h)$ の間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ がその計量を保つとき，すなわち $g = f^*h$ を満たすとき，写像 f を**等長はめ込み**とよぶ．一般に M の次元 m は，N の次元 n より小さいかまたは等しい．$m = n$ のとき f は局所微分同相写像になり，f をリーマン多様体 M から N への**局所等長写像**という．さらに f が M から N の上への微分同相写像のとき，f をリーマン多様体 M から N への**等長写像**という．また，(M, g) からそれ自身への等長写像をリーマン多様体 (M, g) の**等長変換**とよぶ．等長変換全体の集合は合成によって自然に群になるが，ここでは $\mathcal{I}(M, g)$ と記し，リーマン多様体 (M, g) の**等長変換群**とよぶ．考察の対象となるものは，リーマン多様体の (局所) 等長写像や等長変換で不変なものである．たとえば，写像 $f : M \to N$ が局所等長写像のとき，f は M の測地線を N の同じ速さの測地線に移す．また写像 $f : M \to N$ が等長写像のときには，逆写像 $f^{-1} : N \to M$ も等長写像となり，f は距離を保つ，すなわちすべての二点 $p, q \in M$ に対して，

$$d_h(f(p), f(q)) = d_g(p, q)$$

を満たす．

本節において球面とユークリッド空間の場合を考え，その等長変換を求めることからはじめる．

2.1.1 球面の等長変換

まず $(m+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{m+1} = (\mathbf{R}^{m+1}, g_0)$ の中の単位球面 $\mathbf{S}^m$ の等長変換を求めよう．$\mathbf{R}^{m+1}$ の直交変換全体のなす群を $\mathcal{O}_{m+1}$ で表す．$\mathcal{O}_{m+1}$ の元 $f : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{m+1}$ はベクトル空間 $\mathbf{R}^{m+1}$ の線形変換で，ユークリッド内積を保つもの，すなわち

$$\langle f(u), f(v)\rangle_0 = \langle u, v\rangle_0 \qquad (u, v \in \mathbf{R}^{m+1})$$

を満たすものである．各 $f \in \mathcal{O}_{m+1}$ は $\mathbf{S}^m$ をそれ自身へ移すので，f を $\mathbf{S}^m$ へ制限することによって $\mathbf{S}^m$ の微分同相写像が得られる．これも同じく f と記せば，$\mathbf{S}^m$ 上のリーマン計量 g_1 (ユークリッド計量からの誘導計量) の定め方により，f は $\mathbf{S}^m$ の等長変換であることがわかる．ここで $\mathbf{R}^{m+1}$ の標準基底

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),\ \ \dots,\ \ e_{m+1} = (0, \dots, 0, 1)$$

をとり，$\mathcal{O}_{m+1}$ と $(m+1)$ 次直交行列全体のなす群 $O(m+1)$ を同一視して考える．すなわち，直交変換 $f : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{m+1}$ と $f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{(m+1)j})$ の第 i 成分 a_{ij} を (i, j) 成分にもつ $(m+1)$ 次直交行列 $A = \big(a_{ij}\big)$ を対応させる:

$$f(p) = {}^t(A\,{}^tp) \qquad (p \in \mathbf{S}^m \subset \mathbf{R}^{m+1}).$$

一般に $k\times\ell$ 行列 A の転置行列をここでは ${}^tA$ と記す．特に $p = (p^1, \dots, p^k) \in \mathbf{R}^k$ に対して，${}^tp$ は p の列ベクトル表記であるとする．

さて，$\mathbf{S}^m$ の等長変換 $f \in \mathcal{I}(\mathbf{S}^m, g_1)$ が与えられたとき，f は $\mathbf{S}^m$ の測地線を同じ速さの測地線に移すので，任意の点 $p \in \mathbf{S}^m$ と接ベクトル $v \in T_p\mathbf{S}^m$ に対して，$f((\cos t)p + (\sin t)v)$ は，$t = 0$ で $f(p)$ をとおり $df_p(v)$ に接する測地線である．よって

$$f((\cos t)p + (\sin t)v) = (\cos t)f(p) + (\sin t)df_p(v)$$

となる．ここで $T_p\mathbf{S}^m$ と，原点 O と p をとおる直線 $\{p\}_{\mathbf{R}}$ の直交補空間

$$\{p\}_{\mathbf{R}}^{\perp} := \{v \in \mathbf{R}^{m+1} \mid \langle p, v\rangle_0 = 0\}$$

を $\mathbf{R}^{m+1}$ での移動 $\tau_{-p}(x) = x - p$ によって自然に同一視している．この考察から，次のことを確かめることができる．

"二つの等長変換 $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(\mathbf{S}^m, g_1)$ に対して，ある点 $p \in \mathbf{S}^m$ において，$f_1(p) = f_2(p)$ かつその点での微分も一致する，すなわち $(df_1)_p = (df_2)_p$ とする．このとき f_1 と f_2 は $\mathbf{S}^m$ 全体で一致する．"

したがって，$\mathbf{R}^{m+1}$ の標準基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}\}$ に関して，

$$A[f] = \left({}^t f(e_1), {}^t(df_{e_1}(e_2)), \ldots, {}^t(df_{e_1}(e_{m+1}))\right)$$

は $(m+1)$ 次直交行列を定めるが，上述の考察より

$$f(p) = {}^t(A[f]\, {}^t p) \qquad (p \in \mathbf{S}^m \subset \mathbf{R}^{m+1})$$

であることが示される．さらに $\mathcal{I}(\mathbf{S}^m, g_1)$ の二つの元 f_1, f_2 に対して，

$$A[f_1 \circ f_2] = A[f_1]A[f_2]$$

が成り立ち，$\mathcal{I}(\mathbf{S}^m, g_1)$ は $\mathcal{O}_{m+1}$ と一致する．また，標準基底を選ぶことによって $O(m+1)$ と同一視できることがわかった．

さてここで, $\mathbf{S}^m$ の点 $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ における接空間 $T_{e_1}\mathbf{S}^m$ を $\{(0, v) \mid v \in \mathbf{R}^m\}$ と同一視して，さらに $\mathbf{R}^m$ と考える．$\mathbf{R}^m$ の極座標 (r, θ) ($r \geqq 0$, $\theta \in \mathbf{S}^{m-1}$) を使って，$\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{S}^m$ への写像 E を

$$E(r, \theta) = (\cos r)e_{m+1} + (\sin r)\overline{\theta}$$

と定義する．ここで $\overline{\theta} = (0, \theta)$ とおいた．このとき E は，半径 π の距離球体を球面から点 e_1 の対蹠点 $-e_1$ を除いた領域へ移す微分同相写像で，各点 $\theta \in \mathbf{S}^{m-1}$ に対して，$\mathbf{R}^m$ の原点からでる正規測地線 $t \in [0, \infty) \to t\theta$ を，$\mathbf{S}^m$ の点 e_1 からでる正規測地線 $t \in [0, \infty) \to E(t, \theta) = (\cos t)e_1 + (\sin t)\overline{\theta}$ に移す．これによる計量 g_1 の引き戻し $E^* g_1$ は

$$E^* g_1 = dr \otimes dr + (\sin r)^2 \overline{g}_1$$

となることがわかる．ただし，$\overline{g}_1$ は $(m-1)$ 次元 (単位) 球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ の標準計量である．なお，ここでは簡単のために点 e_1 を中心に考えたが，そのほかの点でも同様である．

2.1.2 ユークリッド空間の等長変換

次に，m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ の等長変換を決めよう．ユークリッド計量 g_0 の定義から移動および直交変換，よってそれらを合成して得られる写像が等長変換であることは容易に確かめられる．逆に，$f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ を等長変換とする．f は $\mathbf{R}^m$ の測地線を同じ速さの測地線に移すので，任意の $p \in \mathbf{R}^m$ と接ベクトル $v \in T_p\mathbf{R}^m \, (\simeq \mathbf{R}^m)$ に対して，$f(p+tv)$ は $t=0$ で $f(p)$ をとおり $df_p(v)$ に接する測地線である．よって

$$f(p+tv) = f(p) + t df_p(v)$$

となる．ここで p として原点 O をとり，$a = f(\mathrm{O})$, $t=1$ とおくと，

$$f(v) = a + df_{\mathrm{O}}(v) \qquad (v \in \mathbf{R}^m)$$

となり，$df_{\mathrm{O}}:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ は直交変換であるから，これを ϕ とおくと，等長変換 f は，移動 $\tau_a(p) = p + a$ と直交変換 ϕ の合成 $\tau_a \circ \phi$ として表されることが示された．

このようにして，$\mathcal{I}(\mathbf{R}^m, g_0)$ から $\mathbf{R}^m$ と $\mathcal{O}_m$ の直積 $\mathbf{R}^m \times \mathcal{O}_m$ への全単射 $\Phi:\mathcal{I}(\mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^m \times \mathcal{O}_m$ が得られたことになる．ここで群演算をみてみよう．$\Phi(f) = (a,\phi)$, $\Phi(\widetilde{f}) = (\widetilde{a},\widetilde{\phi})$ に対して，

$$\Phi(f \circ \widetilde{f}) = (a + \phi(\widetilde{a}), \phi \circ \widetilde{\phi})$$

となることに注意する．これから $\mathbf{R}^m \times \mathcal{O}_m$ における群演算 “$\cdot$” として

$$(a,\phi)\cdot(b,\psi) = (a+\phi(b), \phi\circ\psi)$$

を採用すれば，Φ は群としての同形を与える．また (標準基底に関する) 行列表現 $A[\phi]$ を用いて，

$$\Psi(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^t a & A[\phi] \end{pmatrix}$$

とおくと，Ψ は $\mathcal{I}(\mathbf{R}^m, g_0)$ から $(m+1)$ 次正則行列なす群 $GL(m+1,\mathbf{R})$ の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^t a & A[\phi] \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbf{R}^m, A \in O(m) \right\}$$

への同形を与える．このように，$\mathcal{I}(\mathbf{R}^m, g_0)$ は上記のような行列のなす群と同

形である.

ユークリッド空間の等長変換のことを**ユークリッドの運動**あるいは**合同変換**とよび，その等長変換全体を**ユークリッドの運動群**あるいは**合同変換群**とよぶことも多い.

2.2 双曲空間

本節では，まず双曲空間を定義して，その測地線と等長変換を求める．次に，その単位球面，および上半平面上のポアンカレ計量を定義する.

2.2.1 双曲空間と等長変換

1 章の例 13 と例 12 において，球面とユークリッド空間の正規測地線はそれぞれ次のように表せることをみた:

$$
\begin{aligned}
&(\cos t)\,p + (\sin t)\,v && (p \in \mathbf{S}^m,\ v \in T_p\mathbf{S}^m\,(=\{p\}_{\mathbf{R}}{}^{\perp}),\ \|v\| = 1),\\
&p + t\,v && (p \in \mathbf{R}^m,\ v \in T_p\mathbf{R}^m\,(=\mathbf{R}^m),\ \|v\| = 1).
\end{aligned}
$$

これらから

$$
(\cosh t)\,p + (\sinh t)\,v \qquad (p \in X,\ v \in T_pX,\ \|v\| = 1)
$$

が正規測地線を表すようなリーマン多様体 X が存在すると期待するのは自然であろう．ここで $\cosh t, \sinh t$ は**双曲線関数**とよばれるもので，それぞれ次で与えられる:

$$
\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.
$$

さらに k を定数として，微分方程式

$$
f''(t) + kf(t) = 0
$$

を考える. $k = 1, 0, -1$ それぞれの場合に，初期条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ を満たす解 f は

$$
f(t) = \begin{cases} \sin t & (k = 1) \\ t & (k = 0) \\ \sinh t & (k = -1) \end{cases}
$$

で与えられ，そして初期条件 $f(0)=1, f'(0)=0$ を満たす解 f は

$$f(t)=\begin{cases}\cos t & (k=1)\\ 1 & (k=0)\\ \cosh t & (k=-1)\end{cases}$$

で与えられる．なお，$k=-1$ の場合に

$$-(\cosh t)^2+(\sinh t)^2=-1$$

が成り立つことに注意しておこう．

以下において，上述の性質をもつリーマン多様体 X を求めよう．そのために，まず $\mathbf{R}^{m+1}$ 上に次の対称非退化双線形形式 $Q_{1,m}$ を導入する:

$$Q_{1,m}(u,v)=-u^0v^0+u^1v^1+\cdots+u^mv^m \qquad (u,v\in\mathbf{R}^{m+1}).$$

ここでは便宜上 $u=(u^0,u^1,\ldots,u^m)\in\mathbf{R}^{m+1}$ と表した．次に $\mathbf{R}^{m+1}$ の超曲面 $\mathbf{H}^m$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^m&=\{p=(p^0,p^1,\ldots,p^m)\in\mathbf{R}^{m+1}\,|\,Q_{1,m}(p,p)=-1,\ p^0>0\}\\&=\{p=(p^0,p^1,\ldots,p^m)\in\mathbf{R}^{m+1}\,|\,p^0=\sqrt{1+(p^1)^2+\cdots+(p^m)^2}\,\}\end{aligned}$$

で定め，$\mathbf{H}^m$ の点 p と接ベクトル $v\in T_p\mathbf{H}^m$ に対して，$\mathbf{H}^m$ の曲線 $c(t)$ で $c(0)=p, c'(0)=v$ となるものをとる．$Q_{1,m}(c(t),c(t))=-1$ より，両辺を t で微分して，$Q_{1,m}(c(t),c'(t))=0$，したがって $t=0$ として $Q_{1,m}(p,v)=0$ となる．これから，$T_p\mathbf{H}^m$ と $\mathbf{R}^{m+1}$ の部分ベクトル空間 $W_p=\{v\in\mathbf{R}^{m+1}\,|\,Q_{1,m}(p,v)=0\}$ は，移動 τ_{-p} によって自然に同一視できる．ここで，$\mathbf{R}^{m+1}$ はベクトル空間として直線 $\{p\}_{\mathbf{R}}$ と W_p の直和:

$$\mathbf{R}^{m+1}=\{p\}_{\mathbf{R}}\oplus W_p \qquad (p\in\mathbf{H}^m)$$

となり，さらに $Q_{1,m}(p,p)=-1$ より，W_p に $Q_{1,m}$ を制限したものは正定値であるから，W_p 上の内積を定めることに注意する．このように $Q_{1,m}$ を制限することによって，自然に $\mathbf{H}^m$ にリーマン計量 g_{-1} が定まる．すなわち $\iota:\mathbf{H}^m\to\mathbf{R}^{m+1}$ を包含写像とすると

$$g_{-1}=\iota^*(-dx^0\otimes dx^0+dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^m\otimes dx^m) \qquad (2.1)$$

ということになる．$\mathbf{H}^m=(\mathbf{H}^m,g_{-1})$ を m 次元**双曲空間**という．

次に $\mathbf{H}^m$ の測地線を求めてみよう．球面のときと同様に議論を進める．$c(t) = (c^0(t), c^1(t), \ldots, c^m(t))$ を $\mathbf{H}^m$ の曲線とすると，c は

$$Q_{1,m}(c''(t), c(t)) + Q_{1,m}(c'(t), c'(t)) = 0$$

を満たす．$c''(t)$ の $W_{c(t)}$ 成分を $[c''(t)]^T$ と記せば，

$$\begin{aligned} c''(t) &= -Q_{1,m}(c''(t), c(t))\, c(t) + \ [c''(t)]^T \\ &= Q_{1,m}(c'(t), c'(t))\, c(t) + \ [c''(t)]^T \end{aligned}$$

となる．また，c が測地線であることと $[c''(t)]^T = 0$ であることとは同値であることが，球面のときと同様に確かめられる．よって c を正規測地線とすると，$Q_{1,m}(c'(t), c'(t)) = 1$ より $c''(t) = c(t)$ が得られ，これを解いて

$$c(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v \qquad (p = c(0),\ v = c'(0)).$$

これで $\mathbf{H}^m$ の正規測地線が決定された．このように，$\mathbf{H}^m$ の正規測地線は，原点をとおり $Q_{1,m}(v, v) < 0$ となるベクトルを含む平面と $\mathbf{H}^m$ との切り口上の (リーマン計量 g_{-1} に関する) 定速曲線である．

さてここで，$\mathbf{H}^m$ の点 $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ における接空間 $T_{e_0}\mathbf{H}^m$ を $W_{e_0} = \{(0, v) \,|\, v \in \mathbf{R}^m\}$ と同一視して，さらにこれを $\mathbf{R}^m$ と考える．$\mathbf{R}^m$ の極座標 (r, θ) $(r \geqq 0,\ \theta \in \mathbf{S}^{m-1})$ を使って，$\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{H}^m$ への写像 E を

$$E(r, \theta) = (\cosh r)e_0 + (\sinh r)\overline{\theta}$$

と定義する．ここで $\overline{\theta} = (0, \theta)$ とおいた．このとき E は微分同相写像で，各点 $\theta \in \mathbf{S}^{m-1}$ に対して，$\mathbf{R}^m$ の原点からでる半直線 $r \in [0, \infty) \to r\theta$ を $\mathbf{H}^m$ の点 e_0 からでる正規測地線 $r \in [0, \infty) \to E(r, \theta) = (\cosh r)e_0 + (\sinh r)\overline{\theta}$ に移す．これによる計量 g_{-1} の引き戻し E^*g_{-1} を (2.1) を使って求めると

$$E^*g_{-1} = dr \otimes dr + (\sinh r)^2 g_1$$

となることがわかる．ただし g_1 は (単位) 球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ の標準計量である．

次に双曲空間等長変換を求める．まず，$\mathbf{R}^{m+1}$ の線形変換で $Q_{1,m}$ を保つものの全体のなす群を $\mathcal{O}_{1,m}$ と記す．すなわち，$\mathcal{O}_{1,m}$ の元 f は次の条件を満たす線形変換である:

$$Q_{1,m}(f(u), f(v)) = Q_{1,m}(u, v) \qquad (u, v \in \mathbf{R}^{m+1}).$$

さらに $\mathcal{O}_{1,m}$ の元 f で $\mathbf{H}^m$ を保つ，すなわち $f(\mathbf{H}^m) = \mathbf{H}^m$ となるもの全体を $\mathcal{O}^+_{1,m}$ と記す．これは $\mathcal{O}_{1,m}$ の部分群である．$\mathcal{O}^+_{1,m}$ の元を $\mathbf{H}^m$ に制限すれば，$\mathbf{H}^m$ の等長変換が得られ，さらに，$\mathbf{H}^m$ の等長変換は $\mathcal{O}^+_{1,m}$ の元を $\mathbf{H}^m$ に制限したものに限ることが，球面の場合と同様な議論から確かめることができる．すなわち $\mathcal{I}(\mathbf{H}^m, g_{-1}) = \mathcal{O}^+_{1,m}$ となる．ここで $\mathcal{O}_{1,m}$ の元 f に対して，行列

$$A = \left({}^t f(e_0), {}^t(df_{e_0}(e_1)), \ldots, {}^t(df_{e_0}(e_m))\right)$$

を対応させる．ただし $e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ とする．このとき

$$f(p) = {}^t(A\,{}^t p) \qquad (p \in \mathbf{H}^m \subset \mathbf{R}^{m+1})$$

となる．ここで A は

$$A\mathcal{E}\,{}^t A\mathcal{E} = E_{m+1} \qquad \left(\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\right)$$

を満たす $(m+1)$ 次正則行列である．このような行列全体のなす群を $O(1, m)$ と表し，**ローレンツ群**という．$\mathcal{O}^+_{1,m}$ の元は $O(1, m)$ の元で $(1, 1)$ 成分が正であるものに対応する．このように，$\mathcal{I}(\mathbf{H}^m, g_{-1}) = \mathcal{O}^+_{1,m}$ は $GL(m+1, \mathbf{R})$ の部分群

$$O(1, m)^+ = \{A = (a_{ij}) \in O(1, m) \,|\, a_{00} > 0\}$$

として (標準基底 $\{e_i \,|\, 0 \leqq i \leqq m\}$ に関して) 表現される．直交群の場合 (1 章の例 6 参照) と同様にして，$O(1, m)$ と $O(1, m)^+$ も $GL(m+1, \mathbf{R})$ の部分多様体で，$O(1, m)^+$ は $O(1, m)$ の開部分多様体である．そして，単位行列 E_{m+1} における $O(1, m)$ の接空間と点 $A \in O(1, m)$ での接空間はそれぞれ

$$T_{E_{m+1}} O(1, m) = \{X \in M(m+1, \mathbf{R}) \,|\, \mathcal{E}\,{}^t X + X\mathcal{E} = 0\},$$
$$T_A O(1, m) = \{AX \in M(m+1, \mathbf{R}) \,|\, X \in T_{E_{m+1}} O(1, m)\}$$

となる．

2.2.2 ポアンカレ計量

1 章の例 10 における球面の立体射影とそれによる標準計量の表示の方法を，双曲空間に適用してみる．ここでは $\mathbf{R}^m = \{(0, x^1, \ldots, x^m) \,|\, x^1, \ldots, x^m \in \mathbf{R}\}$

とみなす．$\mathbf{H}^m$ の点 p と $\mathbf{R}^{m+1}$ の点 $-e_0=(-1,0,\ldots,0)$ を結ぶ線分と $\mathbf{R}^m$ との交点 $\sigma(p)$ は

$$\sigma(p)=\left(\frac{y^1}{1+y^0},\frac{y^2}{1+y^0},\ldots,\frac{y^m}{1+y^0}\right)\qquad (p=(y^0,\ldots,y^m))$$

と表され，$y^0=\sqrt{1+(y^1)^2+\cdots+(y^m)^2}$ より，σ は $\mathbf{H}^m$ から $\mathbf{R}^m$ の単位球体 $\mathbf{B}^m$ への微分同相写像を与える．このとき，σ の逆写像 ρ は次のようになる:

$$\rho(q)=\left(\frac{1+\|q\|_0{}^2}{1-\|q\|_0{}^2},\frac{2x^1}{1-\|q\|_0{}^2},\ldots,\frac{2x^m}{1-\|q\|_0{}^2}\right)\ (q=(x^1,\ldots,x^m)\in\mathbf{B}^m).$$

これから，g_{-1} の ρ による引き戻し ρ^*g_{-1} を計算すると，

$$\rho^*g_{-1}=\left(\frac{2}{1-\|q\|_0{}^2}\right)^2(dx^1\otimes dx^1+\cdots+dx^m\otimes dx^m)$$

となる．これを $\mathbf{B}^m$ 上の**ポアンカレ計量**という．

次に，$\mathbf{R}^m$ の上半空間 $\mathbf{R}^m_+=\{(u^1,\ldots,u^m)\,|\,u^m>0\}$ から $\mathbf{B}^m$ への微分同相写像 η を

$$\eta(u^1,\ldots,u^m)=\eta(\overline{u},u^m)=\left(\frac{1-\|\overline{u}\|_0{}^2-(u^m)^2}{\|\overline{u}\|_0{}^2+(1+u^m)^2},\ \frac{2\overline{u}}{\|\overline{u}\|_0{}^2+(1+u^m)^2}\right)$$

によって定義する．η の逆写像は

$$\xi(x^1,\ldots,x^m)=\xi(\overline{x},x^m)=\left(\frac{2\overline{x}}{\|\overline{x}\|_0{}^2+(1+x^1)^2},\frac{1-\|\overline{x}\|_0{}^2-(x^1)^2}{\|\overline{x}\|_0{}^2+(1+x^1)^2}\right)$$

で与えられ，ρ^*g_{-1} の η による引き戻しを g_P と記すと，

$$g_P=\frac{1}{(u^m)^2}(du^1\otimes du^1+\cdots+du^m\otimes du^m)$$

となることが確かめられる．$(\mathbf{R}^m_+,g_P)$ を双曲空間のポアンカレの**上半空間モデル**という (1 章の例 14 参照).

以下に，ユークリッド空間とその単位球面および双曲空間に共通の重要な性質を述べておこう．

“任意の二点 p,q とそれぞれの点における接空間の正規直交基底 $\{e_1,\ldots,e_m\}$, $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ に対して，$f(p)=q$, $df_p(e_i)=e'_i$ $(i=1,\ldots,m)$ を満たす等長変換 f が一意的に存在する．”

2.3 等長変換群

一般に，リーマン多様体 (M, g) の等長変換全体 $\mathcal{I}(M, g)$ は合成 $\phi \circ \psi$ $(\phi, \psi \in \mathcal{I}(M, g))$ によって群になる．単位元は M の恒等写像 i_M である．本節において $\mathcal{I}(M, g)$ に位相を与えて，位相変換群としてみることを説明する．

2.3.1 等長変換群

$\mathcal{I}(M, g)$ の元 ϕ は M のリーマン距離 d_g を保つ，すなわち，

$$d_g(\phi(x), \phi(y)) = d_g(x, y) \qquad (\forall x, y \in M) \tag{2.2}$$

を満たす同相写像である．逆に，このように距離を保つ同相写像は等長変換であることが知られている (練習問題 3.6 参照)．ここでは (2.2) に注目して，$\mathcal{I}(M, g)$ に広義一様収束の位相を定義する．M がコンパクトの場合には，一様収束の位相である．

まず M をコンパクトとする．ϕ，$\psi \in \mathcal{I}(M, g)$ に対して，

$$\delta_g(\phi, \psi) = \sup \{d_g(\phi(x), \psi(x)) \,|\, x \in M\}$$

とおく．M がコンパクトであることより，その**直径**

$$\operatorname{diam}(M, g) = \sup \{d_g(x, y) \,|\, x, y \in M\}$$

は有限で，$\delta_g(\phi, \psi)$ は $\operatorname{diam}(M, g)$ をこえない．また，δ_g が $\mathcal{I}(M, g)$ 上の距離となっていることをみるのはやさしい．さらに，定義より次の二つの性質を満たすこともすぐわかる．M の等長変換 η, ϕ, ψ に対して，

$$\delta_g(\eta \circ \phi, \eta \circ \psi) = \delta_g(\phi, \psi), \tag{2.3}$$

$$\delta_g(\phi \circ \eta, \psi \circ \eta) = \delta_g(\phi, \psi). \tag{2.4}$$

(2.3) の性質から δ_g は**左不変距離**であるという．また (2.4) の性質から δ_g は**右不変距離**でもあり，二つを合わせて**両側不変距離**であるという．これらの性質に注目すると，この距離 δ_g に関して，$\mathcal{I}(M, g)$ の群演算 $\phi \to \phi^{-1}$, $(\phi, \psi) \to \phi \circ \psi$ がともに連続であることが以下のように確かめられる:

$$\delta_g(\phi^{-1}, \psi^{-1}) = \delta_g(\psi \circ \phi^{-1}, i_M) = \delta_g(\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi, \phi) = \delta_g(\psi, \phi)$$

より，$\phi \to \phi^{-1}$ が連続であることは明らかである．また

$$\delta_g(\phi_i, \phi) \to 0 \quad (i \to \infty), \qquad \delta_g(\psi_j, \psi) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

とすると，

$$\begin{aligned}\delta_g(\phi_i \circ \psi_j, \phi \circ \psi) &\leqq \delta_g(\phi_i \circ \psi_j, \phi_i \circ \psi) + \delta_g(\phi_i \circ \psi, \phi \circ \psi) \\ &= \delta_g(\psi_j, \psi) + \delta_g(\phi_i, \phi) \to 0 \qquad (i, j \to \infty),\end{aligned}$$

すなわち $(\phi, \psi) \to \phi \circ \psi$ も連続である．また $(\mathcal{I}(M,g), \delta_g)$ は，アスコリ・アルツェラの定理よりコンパクト距離空間であることがわかる．

次に，M がコンパクトではない場合を考察する．M は σ–コンパクトより，コンパクト集合の増大列 $\{K_n \,|\, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ で $M = \bigcup_n K_n$ となるものをとる．各 K_n に対して，

$$\delta_g^{(n)}(\phi, \psi) = \sup\{d_g(\phi(x), \psi(x)) \,|\, x \in K_n\}$$

とおくと，$\delta_g^{(n)}$ は $\mathcal{I}(M,g)$ 上の擬距離を定める．そこで

$$\delta_g(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\delta_g^{(n)}(\phi, \psi)}{1 + \delta_g^{(n)}(\phi, \psi)}$$

とおくと，δ_g は，$\mathcal{I}(M,g)$ 上の距離を与える．δ_g による収束は，広義一様収束にほかならず，それが定める位相は $\mathcal{I}(M,g)$ 上記のコンパクト–開位相とよばれるものと一致する．上のように定めた距離 δ_g はコンパクト集合の増大列のとり方に依存するが，位相そのものはとり方によらない．さらに，$\mathcal{I}(M,g)$ の群演算 $\phi \to \phi^{-1}$ と $(\phi, \psi) \to \psi \circ \phi$ がこの位相に関して連続になる．検証は読者に任せよう．

注意　(1)　$\mathcal{I}(M,g)$ が自明である，つまり等長変換は恒等写像 i_M のみという場合もある．この場合がある意味で一般的である．たとえば，ユークリッド平面を変形して，コブをつけたり，トンネルをつけたりしてみればよい (図 2.1).

(2)　M がコンパクトではない場合にも，コンパクトの場合と同様に，$\mathcal{I}(M,g)$ に両側不変距離

$$\widetilde{\delta}_g(\phi, \psi) = \sup\left\{ \frac{d_g(\phi(x), \psi(x))}{(1 + d_g(\phi(x), \psi(x)))} \,\middle|\, x \in M \right\}$$

を導入して，一様収束の位相を考えることもできる．しかしこれは採用しないことにする．たとえば，ユークリッド空間の直交変換を考えてみると，二つの異なる直

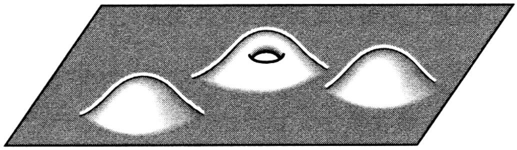


図 2.1

交変換の間の距離はつねに 1 となり，したがって，この距離による位相は直交変換のなす集合における離散位相となる．

(3) 本項では，リーマン多様体の等長変換とそれのなす群に焦点を絞って議論してきたが，一般的に考えるほうが自然である．二つの σ–コンパクトな距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して，X から Y への連続写像全体のなす集合 $\mathcal{C}(X, Y)$ に，先に説明した方法で距離を定義し，位相を導入することができる．X がコンパクトならば一様収束の位相であり，非コンパクトのときは広義一様収束の位相である．コンパクト–開位相といってもよい．すなわち X のかってなコンパクト集合 K と Y の開集合 W の組 (K, W) に対して，$\mathcal{C}(K, W) = \{\phi \in \mathcal{C}(X, Y) \mid \phi(K) \subset W\}$ とおき，このような集合の有限個の共通部分を開集合の準基とする $\mathcal{C}(X, Y)$ の位相を，**コンパクト–開位相**という．X から Y への等距離写像，すなわち $d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y)$ $(\forall x, y \in X)$ を満たす写像全体 $\mathcal{I}(X, Y)$ は，$\mathcal{C}(X, Y)$ の部分空間である（ただし $\mathcal{I}(X, Y)$ が空集合となることもある）．たとえば，X を区間 $[a, b]$ とすれば，$\mathcal{C}([a, b], Y)$ は Y の連続曲線 $c : [a, b] \to Y$ 全体のなす距離空間であり，$\mathcal{I}([a, b], Y)$ の元 c は両端 $c(a)$ と $c(b)$ の間の距離を実現する曲線ということになる．

2.3.2 等長作用

一般に，G が群であると同時にハウスドルフ位相空間でもあり，二つの写像 $(a, b) \to ab : G \times G \to G$ と $a \to a^{-1} :\ G \to G$ がともに連続であるとき，G を**位相群**という．たとえば，任意の群に離散位相を入れたものは位相群であるが，離散位相をもつ位相群を**離散群**という．位相群 G において，各元 a に対して，a による G の左移動 L_a，右移動 R_a，内部自己同形 $I_a\,(= L_a \circ R_{a^{-1}})$ をそれぞれ

$$L_a(b) = ab, \quad R_a(b) = ba, \quad I_a(b) = aba^{-1} \qquad (b \in G)$$

によって定義する．いずれも G の同相写像である．なお，G の単位元 e に対

して，L_e, R_e, I_e はすべて G の恒等写像 i_G である．

リーマン多様体 (M,g) の等長変換全体 $\mathcal{I}(M,g)$ はコンパクト–開位相によって位相群である．さらに $\mathcal{I}(M,g)\times M$ から M への写像 σ を $\sigma(\phi,x)=\phi(x)$ と定めれば，σ は $\mathcal{I}(M,g)$ の位相の定義から明らかに直積位相空間 $\mathcal{I}(M,g)\times M$ から M への連続写像で，次の性質 (i), (ii) を満たしている:

(i) $\sigma(i_M,x)=x \qquad (\forall x\in X)$,

(ii) $\sigma(\phi\circ\psi,x)=\sigma(\phi,\sigma(\psi,x)) \qquad (\forall\phi,\psi\in\mathcal{I}(M,g),\ \forall x\in M)$.

一般に，位相群 G と位相空間 X が与えられたとき，(上の $\mathcal{I}(M,g)$ を G に，M を X に置き換えて得られる) 二つの性質 (i), (ii) を満たす $G\times X$ から X への連続写像 σ のことを，G の X への**連続作用**という．$\sigma(a,x)$ を便宜上よく使われる記号 $a\cdot x$ にあらためて上記の (i), (ii) を書き直すと

(i) $e\cdot x=x \qquad (\forall x\in X)$,

(ii) $(ab)\cdot x=a\cdot(b\cdot x) \qquad (\forall a,b\in G,\ \forall x\in X)$

となる．ここで任意の $a\in G$ に対して $L_a(x)=a\cdot x$ $(x\in X)$ とおくと，L_a は X からそれ自身への連続写像で，

$$L_a(L_{a^{-1}}(x))=a\cdot(a^{-1}\cdot x)=(aa^{-1})\cdot x=e\cdot x=x$$

より L_a の逆写像が $L_{a^{-1}}$ によって与えられ，L_a は X の同相写像である．(i), (ii) をいい換えると，$a\to L_a$ は G から X の同相写像全体からなる群への準同形ということである．また，各 $x\in X$ に対して，部分集合 $\mathcal{O}(x)=\{a\cdot x\,|\,a\in G\}$ を，x をとおる G の**軌道**という．もし $\mathcal{O}(x)=X$，すなわち X の任意の点 y に対して，$y=a\cdot x$ となる G の元 a が存在するならば，G は X に**推移的に作用する**という (このときには，すべての点に対して $\mathcal{O}(x)=X$ である)．それから各点 x に対して，$a\cdot x=x$ を満たす G の元 a 全体は G の閉部分群となり，これを G の点 x における**固定群**あるいは**等方群**という．すべての点 x に対して，その固定群が単位元のみからなるならば，G の作用は (固定点のない) **自由な作用である**という．このとき，G と各軌道 $\mathcal{O}(x)$ の間の対応 $a\to a\cdot x$ は全単射である．

さて，ここでひとつの考察をしよう．位相群 G が距離空間 (X,d_X) に連続に作用し，さらに各 $a\in G$ に対してその作用は等長的である，すなわち距離を

保つとする:

$$d_X(a\cdot x,\ a\cdot x)=d_X(x,y) \qquad (\forall a\in G,\ \forall x,\ y\in X).$$

ここで X 上の関係 $\approx$ を,

$$x\approx y \Longleftrightarrow G \text{ の元の列 } \{a_i\} \text{ があって, } \lim_{i\to\infty} d_X(x,a_i\cdot y)=0$$

によって定めると, $\approx$ は同値関係となる. "$x\approx y$" は, x は y をとおる軌道 $\mathcal{O}(y)$ の閉包に含まれるといい換えられるので, この同値関係は, 軌道の閉包からなる部分集合の族 $\{\overline{\mathcal{O}(x)}\,|\,x\in X\}$ による X の分割と同等である. 商集合, すなわち $\overline{\mathcal{O}(x)}$ を一点とみなして得られる集合には, 一般に商写像 $\pi: X\to X/\approx$ をとおして商位相を入れて考えるが, ここでは自然に距離 $\widetilde{d}$ が定義されることを次に説明する.

命題 2.1 任意の二点 $u,v\in X/\approx$ に対して, $\pi^{-1}(u)$ と $\pi^{-1}(v)$ は次の意味において平行である. "点 $x\in X$ と $\pi^{-1}(v)$ の距離

$$d_X(x,\pi^{-1}(v))=\inf\{d_X(x,y)\,|\,y\in\pi^{-1}(v)\}$$

は, x が $\pi^{-1}(u)$ を動くとき一定である. その値を ℓ とおくと, $y\in\pi^{-1}(v)$ と $\pi^{-1}(u)$ の距離

$$d(y,\pi^{-1}(u))=\inf\{d_X(x,y)\,|\,x\in\pi^{-1}(u)\}$$

も ℓ に等しい." さらに $\widetilde{d}(u,v)=\ell$ と定めると, $\tilde{d}$ は $X/\approx$ 上の距離を与え, $\pi:(X,d_X)\to(X/\approx,\tilde{d})$ は縮小写像となる. すなわち

$$\widetilde{d}(\pi(x),\pi(y))\leqq d_X(x,y) \qquad (\forall x,y\in X)$$

を満たす.

証明 $\pi^{-1}(u)$ の元 x と $\pi^{-1}(v)$ の元 y を任意に選ぶ. このとき, 適当な G の元の列 $\{a_i\}$ があって, $d_X(x,a_i\cdot y)\to d_X(x,\overline{\mathcal{O}(y)})$ $(i\to\infty)$ とできる. したがって, 任意の元 $a\in G$ に対して,

$$d(a\cdot x,\overline{\mathcal{O}(y)}\,)\leqq \liminf_{i\to\infty} d_X(a\cdot x,a\cdot(a_i\cdot y))=\lim_{i\to\infty} d_X(x,a_i\cdot y)=d_X(x,\overline{\mathcal{O}(y)}\,),$$

つまり $d_X(a\cdot x,\overline{\mathcal{O}(y)}\,)\leqq d_X(x,\overline{\mathcal{O}(y)}\,)$ が従う. $d_X(a\cdot x,\overline{\mathcal{O}(y)}\,)\geqq d_X(x,\overline{\mathcal{O}(y)}\,)$ も同様に示され, 結局これらは一致する. これから前半の主張は明らかであり, また $\widetilde{d}$ が対称性と三角不等式を満たすこともすぐわかる. さらに条件 $\widetilde{d}(\pi(x),\pi(y))=0$ は

$\overline{\mathcal{O}(x)} \cap \overline{\mathcal{O}(y)} \neq \emptyset$ ということであり，これらの軌道の閉包は一致しなければならない．これから $\widetilde{d}$ が距離になることが示された．残りの主張も明らかである． ∎

さて，位相群 G から位相空間 X への連続作用 $\sigma : G \times X \to X$ を正確には**左連続作用**という．**右連続作用** $\rho : X \times G \to X$ も左連続作用と同様に，$X \times G$ から X への連続写像で，$x \cdot a = \rho(x, a)$ と記すことによって，

$$\text{(i)}' \quad x \cdot e = x \qquad (\forall x \in X)$$

$$\text{(ii)}' \quad x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b \qquad (\forall a, b \in G,\ \forall x \in X)$$

を満たすものとして定義する．ここで，左連続作用 σ が与えられたとき，$\rho(x, a) = \sigma(a^{-1}, x)$ とおくと，ρ は右連続作用になり，同様に右連続作用から左連続作用が得られることに注意しておく．

X の二点 x, y が同じ軌道上にあるとき x と y は同値であるとすれば，これは X の同値関係である．X のこの同値関係による商位相空間を X/G で表し，G の**軌道空間**という (X/G が一点のみからなることと G の作用が推移的であることはいうまでもなく同等な条件である)．なお，左作用であることを明確にする必要のあるときには，軌道空間を $G \backslash X$ と記す．また X が距離空間で G が等長に作用しているとき，すべての軌道が閉集合ならば，命題 2.1 のように軌道空間は自然に距離空間になる．

たとえば，X 自身を位相群とし，G はその部分群とする．ここで G には X の部分位相空間としての位相を導入すると，G も位相群になる．位相群 G を位相群 X の位相部分群あるいは簡単に部分群とよぶ．G はその群演算によって自然に右から連続に X に作用し，軌道空間 X/G が定義される．つまり X の点 a の G の軌道は a を含む左剰余類ということになる．さらに，X 上に右不変距離 d が与えられ G が閉部分群であれば，X/G 上に自然に距離が導入されることになる．G 自身が閉部分群でなくても，その閉包 $\overline{G}$ は X の閉部分群になることが知られている (たとえば，[4, 5, 6] 参照)．なお，右と左を入れ換えても同様に $G \backslash X$ が定義される．

2.3.3 リー群の例

2.1 節，2.2 節で学んだように，ユークリッド空間とその球面，および双曲空間の等長変換群はそれぞれ行列からなる群として表現でき，群演算が C^{∞} 級写

像となる多様体になっている．一般に群が多様体であり，その演算が C^∞ 級写像となるものを**リー群**という．たとえば，$\mathbf{R}^m$ あるいは m 次元 (実) ベクトル空間はその加法によって可換なリー群である．

以下にリー群の基本的な例をいくつか述べる．実係数の m 次正方行列全体 $M(m,\mathbf{R})=\{A=\big(a_{ij}\big)\,|\,a_{ij}\in\mathbf{R}\}$ において，正則行列全体 $GL(m,\mathbf{R})$ は $M(m,\mathbf{R})$ の開集合で，したがって n 次元多様体であり，さらに，$(A,B)\to AB$; $A\to A^{-1}$ は C^∞ 級である．したがって $GL(m,\mathbf{R})$ はリー群となる．これを，(実係数の) **一般線形群**という．直交群 $O(m)=\{A\in GL(m,\mathbf{R})\,|\,{}^tAA=E_m\}$，**特殊線形群** $SL(m,\mathbf{R})=\{A\in GL(m,\mathbf{R})\,|\,\det A=1\}$，**特殊直交群** $SO(m)=\{A\in O(m)\,|\,\det A=1\}$，**ローレンツ群** $O(1,m-1)$ とその部分群 $O(1,m-1)^+$ などもリー群である (1 章の例 5, 6 参照)．

次に，複素係数の m 次正方行列全体 $M(m,\mathbf{C})=\{Z=\big(z_{ij}\big)\,|\,z_{ij}\in\mathbf{C}\}$ を考える．複素一般線形群 $GL(m,\mathbf{C})$，複素特殊線形群 $SL(m,\mathbf{C})$，ユニタリー群 $U(m)$，特殊ユニタリー群 $SU(m)$ をそれぞれ次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&GL(m,\mathbf{C})=\{Z\in M(m,\mathbf{C})\,|\,\det Z\neq 0\},\\
&SL(m,\mathbf{C})=\{Z\in M(m,\mathbf{C})\,|\,\det Z=1\},\\
&U(m)=\{Z\in M(m,\mathbf{C})\,|\,Z\,{}^t\overline{Z}=E_m\},\\
&SU(m)=\{Z\in U(m)\,|\,\det Z=1\}.
\end{aligned}
$$

ここで $\mathbf{C}^m$ と $\mathbf{R}^{2m}$ を，対応

$$
(x^1+\sqrt{-1}y^1,\ldots,x^m+\sqrt{-1}y^m)\Longleftrightarrow(x^1,y^1,\ldots,x^m,y^m) \tag{2.5}
$$

によって同一視して，$\mathbf{C}^m$ でのスカラー $\sqrt{-1}$ 倍を $\mathbf{R}^{2m}$ でみると，線形変換

$$
J:\ (x^1,y^1,\ldots,x^m,y^m)\to(-y^1,x^1,\ldots,-y^m,x^m)
$$

が対応している．これを列ベクトル表記によって行列として表すと，

$$
\begin{pmatrix}-y^1\\ x^1\\ \vdots\\ -y^m\\ x^m\end{pmatrix}
=J\begin{pmatrix}x^1\\ y^1\\ \vdots\\ x^m\\ y^m\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}0&-1&&&\\1&0&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&-1\\&&&1&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}x^1\\ y^1\\ \vdots\\ x^m\\ y^m\end{pmatrix}
$$

となる．$\mathbf{C}^m$ の複素 k 次元線形部分空間は，$\mathbf{R}^{2m}$ の J–不変な $2k$ 次元線形部分空間 (すなわち，$JV = V$ を満たす $\mathbf{R}^{2m}$ の部分空間 V) に対応し，$\mathbf{C}^m$ の複素線形写像は，$\mathbf{R}^{2m}$ の J と可換な線形写像 (すなわち，$J \circ f = f \circ J$ を満たす $\mathbf{R}^{2m}$ の線形写像 f) に対応する．したがって，$M(m, \mathbf{C})$ は $M(2m, \mathbf{R})$ の部分空間 $\{A = \left(a_{ij}\right) \in M(2m, \mathbf{R}) \mid AJ = JA\}$ に，$GL(m, \mathbf{C})$ は $\{A \in GL(2m, \mathbf{R}) \mid AJ = JA\}$ に，$U(m)$ は $\{A \in O(2m) \mid AJ = JA\}$ にそれぞれ対応し，これらはリー群である．さらに，

$$SL(m, \mathbf{C}) = \{A \in M(m, \mathbf{C}) \mid \det A = 1\},$$
$$SU(m) = U(m) \cap SL(m, \mathbf{C})$$

なども同様にリー群である．とくに

$$U(1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in \mathbf{R}\}$$

となり，$U(1)$ は乗法群 $GL(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ の部分群である．また

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z^1 & -\overline{z^2} \\ z^2 & \overline{z^1} \end{pmatrix} \;\middle|\; (z^1, z^2) \in \mathbf{C}^2,\ |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1 \right\}$$

となる．

さて，リー群の直積は自然にリー群になる．たとえば，m 次元トーラス

$$\mathbf{T}^m = U(1) \times \cdots \times U(1)$$

は基本的な例である．リー群の閉部分多様体が群として部分群であるとき，リー**閉部分群**という．なお，リー群の閉部分群はリー閉部分群になることが知られている (たとえば [4, 7] 参照)．2.6 節において，リー群の初歩的な事柄について述べることにする．

2.4 ホ ッ プ 束

本節では，3 次元球面から 2 次元球面へのホップ写像について，その定義とリーマン幾何の視点からの性質を説明する．ホップ写像は，連続的に定値写像に変形できない，3 次元球面から 2 次元球面への連続写像の最初の例として，H. Hopf によって考察されたものである．

2.4.1 ポップ写像の定義

$\mathbf{R}^3$ の単位球面 $\mathbf{S}^2$ から北極 $p_1=(0,0,1)$ を除いた開集合を V_1 とおく．V_1 から $\mathbf{R}^2$ への北極を中心とする立体射影 σ_1 とその逆写像 ρ_1 を考える．σ_1, ρ_1 は，それぞれ次のように与えられる (1 章の例 10 参照):

$$\sigma_1(p)=\left(\frac{x^1}{1-x^3},\frac{x^2}{1-x^3}\right)\qquad (p=(x^1,x^2,x^3)\in V_1),$$
$$\begin{aligned}\rho_1(q)&=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\quad (q=(x,y)\in\mathbf{R}^2)\\&=\left(\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}+1},\frac{z-\overline{z}}{\sqrt{-1}(z\overline{z}+1)},\frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}\right)\quad (q=x+\sqrt{-1}\,y\in\mathbf{C}).\end{aligned}\tag{2.6}$$

ここで $\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{C}=\{z=x+\sqrt{-1}\,y\,|\,x,y\in\mathbf{R}\}$ の同一視のもとに，$\mathbf{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えて得られる位相空間 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ を $\widehat{\mathbf{C}}$ と表すと，p_1 に ∞ を対応させることで自然に σ_1 は $\mathbf{S}^2$ から $\widehat{\mathbf{C}}$ への同相写像に拡張され，それを $\widehat{\sigma}_1$ と表し，$\widehat{\rho}_1$ はその逆写像を表す．同様に，南極 $p_{-1}=(0,0,-1)$ を中心とする立体射影 $\sigma_{-1}:V_{-1}\to\mathbf{R}^2$ $(V_{-1}=\mathbf{S}^2\setminus\{p_{-1}\})$ とその逆写像 ρ_{-1} が次のように得られる:

$$\sigma_{-1}(p)=\left(\frac{x^1}{1+x^3},\frac{x^2}{1+x^3}\right)\qquad (p=(x^1,x^2,x^3)\in V_{-1}),$$
$$\begin{aligned}\rho_{-1}(q)&=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\quad (q=(x,y)\in\mathbf{R}^2)\\&=\left(\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}+1},\frac{z-\overline{z}}{\sqrt{-1}z\overline{z}+1},-\frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}\right)\quad (q=x+\sqrt{-1}\,y\in\mathbf{C}).\end{aligned}$$

ここで σ_1 と同様に，σ_{-1} も p_{-1} に ∞ を対応させて，$\mathbf{S}^2$ から $\widehat{\mathbf{C}}$ への同相写像に拡張し，それを $\widehat{\sigma}_{-1}$ と表す．ここで，$V_1\cap V_{-1}$ の点 p に対して $\sigma_1(p)=z$ とすれば，$\sigma_{-1}(p)=1/\overline{z}$ であることに注意しておく．

次に，$\mathbf{R}^4$ の単位球面 $\mathbf{S}^3$ を考える．ここでは $\mathbf{R}^4$ と $\mathbf{C}^2$ を (2.5) のように

$$(x^1,y^1,x^2,y^2)\Longleftrightarrow(x^1+\sqrt{-1}y^1,\ x^2+\sqrt{-1}y^2)$$

によって同一視して，

$$\mathbf{S}^3=\{(z^1,z^2)\in\mathbf{C}^2\,|\,|z^1|^2+|z^2|^2=1\}$$

とみなす．さらに $z^1=r_1e^{\sqrt{-1}\theta_1}$, $z^2=r_2e^{\sqrt{-1}\theta_2}$ とおいて，${r_1}^2+{r_2}^2=1$,

$r_1 \geqq 0, r_2 \geqq 0$ より，$r_1 = \cos(\xi/2), r_2 = \sin(\xi/2)$ とおくと，

$$\mathbf{S}^3 = \left\{ \left(\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \ e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \ e^{\sqrt{-1}\theta_2} \right) \middle| \ 0 \leqq \frac{\xi}{2} \leqq \frac{\pi}{2},\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

と表すことができる．各 $\xi/2 \in [0, \pi/2]$ に対して，

$$T_{\xi/2} = \left\{ \left(\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \ e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \ e^{\sqrt{-1}\theta_2} \right) \mid \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

は，$0 < \xi/2 < \pi/2$ のとき 2 次元トーラスと微分同相な $\mathbf{S}^3$ の部分多様体となり，T_0 と $T_{\pi/2}$ はそれぞれ $\mathbf{S}^3$ に埋め込まれた円周となる．(このように，$\mathbf{S}^3$ は二つの中味の詰まったトーラス $K_1 = \bigcup\{T_{\xi/2} \,|\, 0 \leqq \xi/2 \leqq \pi/4\}$ と $K_2 = \bigcup\{T_{\xi/2} \,|\, \pi/4 \leqq \xi/2 \leqq \pi/2\}$ をその表面 $T_{\pi/4}$ で貼り合わせた多様体であるとみることができる.)

さて，$\mathbf{S}^3$ への $U(1) = \{e^{\sqrt{-1}\theta} \,|\, \theta \in \mathbf{R}\}$ による次のような作用を考える．$\mathbf{S}^3$ の点 $p = (z^1, z^2)$ と $U(1)$ の元 a に対して，

$$p \cdot a = (z^1, z^2) \cdot a = (z^1 a, z^2 a)$$

と定める．$p \cdot a$ も $\mathbf{S}^3$ の元である．このように定義された $\mathbf{S}^3 \times U(1)$ から $\mathbf{S}^3$ への写像 $(p, a) \to p \cdot a$ は，リー群 $U(1)$ の多様体 $\mathbf{S}^3$ への C^∞ 級右作用となっている．p をとおる $U(1)$ 軌道 $\mathcal{O}(p) = \{p \cdot a \,|\, a \in U(1)\}$ は，p が $T_{\xi/2}$ 上にあれば $T_{\xi/2}$ 上の円周であり，また p を含む複素直線 $\mathbf{L}_p = \{p \cdot \lambda \,|\, \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\}$ と $\mathbf{S}^3$ との切り口 $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{S}^3$ となっている．((2.5) のように $\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{R}^4$ とみなすと，$\mathbf{L}_p$ は 原点をとおる実平面であるから，$\mathcal{O}(p) = \mathbf{L}_p \cap \mathbf{S}^3$ は $\mathbf{S}^3$ の大円となっている.)

以下において，軌道空間 $\mathbf{S}^3/U(1)$ と，$\mathbf{S}^3$ から $\mathbf{S}^3/U(1)$ への商写像について考察する．まず，$\mathbf{S}^3$ の二点 (z^1, z^2) と (w^1, w^2) が同じ軌道上にあることは ($z^2 = 0$ のとき $z^1/z^2 = \infty$ とおいて)，z^1/z^2 と w^1/w^2 が $\widehat{\mathbf{C}}$ の元として等しいということにほかならないこと，つまり軌道の集合は次のように $\widehat{\mathbf{C}}$ の元と 1 対 1 に対応することに注意する:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((z^1, z^2)) \quad &\longleftrightarrow \quad \frac{z^1}{z^2} \in \widehat{\mathbf{C}}, \\ (T_{\pi/2} = \mathcal{O}((0, 1)) \quad &\longleftrightarrow \quad 0 \in \widehat{\mathbf{C}}, \\ T_0 = \mathcal{O}((1, 0)) \quad &\longleftrightarrow \quad \infty \in \widehat{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

ここで $\widehat{\rho}_1 : \widehat{\mathbf{C}} \to \mathbf{S}^2$ をとおして商集合を $\mathbf{S}^2$ とみなすと，

$$\mathcal{P}(z^1, z^2) = \widehat{\rho}_1\left(\frac{z^1}{z^2}\right) \qquad \left(= \widehat{\rho}_{-1}\left(\frac{\overline{z^2}}{\overline{z^1}}\right)\right)$$

によって定義される $\mathbf{S}^3$ から $\mathbf{S}^2$ への写像 $\mathcal{P}$ が，商写像とみなされる．(2.6) により

$$\mathcal{P}(z^1, z^2) = \left(z^1\overline{z^2} + \overline{z^1}z^2,\ -\sqrt{-1}(z^1\overline{z^2} - \overline{z^1}z^2),\ |z^1|^2 - |z^2|^2\right) \qquad ((z^1, z^2) \in \mathbf{S}^3).$$

したがって，$(z^1, z^2) = (x^1 + \sqrt{-1}y^1, x^2 + \sqrt{-1}y^2)$ とおいて，$\mathbf{R}^4$ の直交座標系 (x^1, y^1, x^2, y^2) を用いて $\mathcal{P}$ を表すと，

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(x^1, y^1, x^2, y^2)\\ &= \left(2x^1x^2 + 2y^1y^2, 2x^2y^1 - 2x^1y^2,\ (x^1)^2 + (y^1)^2 - (x^2)^2 - (y^2)^2\right)\\ &\qquad\qquad ((x^1, y^1, x^2, y^2) \in \mathbf{S}^3)\end{aligned}$$

となる．このように $\mathcal{P}$ は，$\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への 2 次の斉次多項式関数からなる成分をもつ写像を $\mathbf{S}^3$ に制限して得られる C^∞ 級写像であることが確かめられた．この写像 $\mathcal{P}$ を $\mathbf{S}^3$ から $\mathbf{S}^2$ への**ホップ写像**という．ここで

$$(z^1, z^2) = \left(\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\ e^{\sqrt{-1}\theta_1},\ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\ e^{\sqrt{-1}\theta_2}\right)$$

とおいて，パラメータ $(\xi, \theta_1, \theta_2)$ を使って $\mathcal{P}$ を表すと，

$$\mathcal{P}(\xi, \theta_1, \theta_2) = (\sin\xi\cos(\theta_1 - \theta_2),\ \sin\xi\sin(\theta_1 - \theta_2), \cos\xi)$$

となる．ここで $\theta = \theta_1 - \theta_2$ とおけば，図 2.2 のように (ξ, θ) が 2 次元単位球面 $\mathbf{S}^2$ の球面座標系となっている．

ホップ写像をさらに詳しく調べてみよう．まず $V_1 = \mathbf{S}^2 \setminus \{p_1\}$ から $\mathcal{P}^{-1}(V_1)$ への C^∞ 級写像を

$$f_1(v) = \frac{(\sigma_1(v), 1)}{\sqrt{|\sigma_1(v)|^2 + 1}} \qquad (v \in V_1)$$

によって定義すると，

$$\mathcal{P}(f_1(v)) = v \qquad (v \in V_1)$$

が成り立つ．これに注目して，$\mathcal{P}^{-1}(V_1)$ から $V_1 \times U(1)$ への C^∞ 級写像 Ψ_1

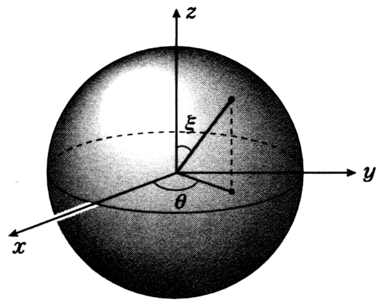


図 2.2

と $V_1 \times U(1)$ から $\mathcal{P}^{-1}(V_1)$ への C^∞ 級写像 Φ_1 を，それぞれ次のように定義する:

$$\Psi_1(z^1, z^2) = \left(\mathcal{P}(z^1, z^2), \frac{z^2}{|z^2|}\right) \qquad ((z^1, z^2) \in \mathcal{P}^{-1}(V_1)),$$

$$\Phi_1(v, a) = f_1(v) \cdot a \qquad (v \in V_1,\ a \in U(1)).$$

これらは互いに逆写像となっており，それぞれ微分同相写像である．

同様に $V_{-1} = \mathbf{S}^2 \setminus \{p_{-1}\}$ から $\mathcal{P}^{-1}(V_{-1})$ への C^∞ 級写像を

$$f_{-1}(v) = \frac{(1, \overline{\sigma_{-1}(v)})}{\sqrt{|\sigma_{-1}(v)|^2 + 1}} \qquad (v \in V_{-1})$$

によって定義すると，

$$\mathcal{P}(f_{-1}(v)) = v \qquad (v \in V_{-1})$$

が成り立つ．これに注目して，$\mathcal{P}^{-1}(V_{-1})$ から $V_{-1} \times U(1)$ への C^∞ 級写像 Ψ_{-1} と $V_{-1} \times U(1)$ から $\mathcal{P}^{-1}(V_{-1})$ への C^∞ 級写像 Φ_{-1} を，それぞれ次のように定義する:

$$\Psi_{-1}(z^1, z^2) = \left(\mathcal{P}(z^1, z^2), \frac{z^1}{|z^1|}\right) \qquad ((z^1, z^2) \in \mathcal{P}^{-1}(V_{-1})),$$

$$\Phi_{-1}(v, a) = f_{-1}(v) \cdot a \qquad (v \in V_{-1},\ a \in U(1)).$$

これらは互いに逆写像となっており，それぞれ微分同相写像である．

球面 $\mathbf{S}^2$ の点 u に対して，$\mathcal{P}^{-1}(u)$ を u 上のファイバーというよび方をする．実際，$\mathbf{S}^3$, $\mathbf{S}^2$ とホップ写像 $\mathcal{P} : \mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$ の組は，後で説明する用語を用いれ

ば，全空間 $\mathbf{S}^3$，底空間 $\mathbf{S}^2$，構造群 $U(1)$ の主束ということになる．$\Psi_{\pm 1}$ はこの主束の開集合 $V_{\pm 1}$ 上の局所自明化写像，$f_{\pm 1}$ は $V_{\pm 1}$ 上の断面ということになる．

2.4.2 ポップ写像とリーマン計量

リーマン多様体 $(\mathbf{S}^3, \overline{g}_1)$ からリーマン多様体 $(\mathbf{S}^2, g_1)$ への写像としてのホップ写像の，リーマン幾何的性質をいくつか述べよう．ここに，$\overline{g}_1$ と g_1 はそれぞれの単位球面の標準計量とする．

例題 2.2 (1) $U(1)$ の $\mathbf{S}^3$ への右作用は等長作用である．つまり $a \in U(1)$ に対して $R_a(p) = p \cdot a$ $(p \in \mathbf{S}^3)$ とおくと，R_a は $\overline{g}_1$ に関して等長変換である．

(2) すべての二点 $u, v \in \mathbf{S}^2$ に対して，ファイバー $\mathcal{P}^{-1}(u)$ と $\mathcal{P}^{-1}(v)$ は，次の意味において平行である．"$\overline{d}_1$ を $\mathbf{S}^3$ のリーマン距離として，点 $p \in \mathbf{S}^3$ と $\mathcal{P}^{-1}(v)$ の距離

$$d(p, \mathcal{P}^{-1}(v)) = \inf\{\, \overline{d}_1(p, q) \mid q \in \mathcal{P}^{-1}(v)\}$$

は，p が $\mathcal{P}^{-1}(u)$ を動くとき一定である．その値を ℓ とおくと，$q \in \mathcal{P}^{-1}(v)$ と $\mathcal{P}^{-1}(u)$ の距離

$$d(q, \mathcal{P}^{-1}(u)) = \inf\{\overline{d}_1(p, q) \mid p \in \mathcal{P}^{-1}(u)\}$$

も ℓ に等しい．"

さらに $\widetilde{d}(u, v) = \ell$ と定めると，$\widetilde{d}$ は $\mathbf{S}^2$ 上のひとつの距離を与える．

(3) d_1 を $(\mathbf{S}^2, g_1)$ のリーマン距離とすると，

$$\widetilde{d}(u, v) = \frac{1}{2} d_1(u, v) \quad \left(= \frac{1}{2} \cos^{-1} \langle u, v \rangle_0\right) \qquad (u, v \in \mathbf{S}^2)$$

が成り立つ．

証明 (1) については明らかであろう．

(2) については，各ファイバーが $U(1)$ の等長作用による軌道であるということより命題 2.1 から従う．

さて (3) を検証しよう．まず，$U(2)$ は自然に左から $\mathbf{S}^3$ に等長的に作用している．$\mathbf{S}^3$ $(\subset \mathbf{C}^2)$ の元を列ベクトルで表して，$A \in U(2)$, $p \in \mathbf{S}^3$ に対して，

$$A \cdot p = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z^1 + \gamma z^2 \\ \beta z^1 + \delta z^2 \end{pmatrix}$$

とおく．これから，次のことは明らかであろう:

$$(A\cdot p)\cdot a = A\cdot (p\cdot a) \qquad (A\in U(2),\ p\in S^3,\ a\in U(1)).$$

したがって，A は点 p をとおる $U(1)$ 軌道 $\mathcal{O}(p)$ を，$A\cdot p$ をとおる $U(1)$ 軌道 $\mathcal{O}(A\cdot p)$ に移し，

$$\widetilde{A}(\mathcal{P}(p)) = \mathcal{P}(A\cdot p) \qquad (p\in \mathbf{S}^3)$$

を満たす $\mathbf{S}^2$ からそれ自身への写像 $\widetilde{A}$ を誘導する．A が $\mathbf{S}^3$ の等長変換より，$\widetilde{A}$ も距離 $\widetilde{d}$ に関して等長変換であることが従う．すなわち，

$$\widetilde{d}(\widetilde{A}(u),\widetilde{A}(v)) = \widetilde{d}(u,v) \qquad (u,v\in \mathbf{S}^2)$$

となる．ここで $\mathbf{S}^3$ の任意の点 $p=(z^1,z^2)$ に対して，

$$A_p = \begin{pmatrix} z^1 & -\overline{z^2} \\ z^2 & \overline{z^1} \end{pmatrix} \quad (\in SU(2))$$

とおけば，A_p は 点 $\widetilde{p}_1=(1,0)$ を p に移す．したがって，任意の二点 $p,q\in\mathbf{S}^3$ に対して，$A_qA_p^{-1}$ は p を q に移す $U(2)$ の元である．このように，$U(2)$ は $\mathbf{S}^3$ に推移的に左から作用している．とくに $U(2)$ の $\mathbf{S}^2$ への左作用 $(A,u)\to\widetilde{A}(u)$ も推移的である．よって (3) を示すには，u は北極 p_1 としてよい．そこで $\mathcal{P}^{-1}(p_1)$ の元として $\widetilde{p}_1$ をとり，v の球面座標を (ξ,θ) とすれば，

$$\mathcal{P}^{-1}(v) = \left\{ \left(\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{\sqrt{-1}(\theta+\theta_2)},\ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{\sqrt{-1}\theta_2} \right) \mid \theta_2\in\mathbf{R} \right\}$$

となることから，$d(\widetilde{p_1},\mathcal{P}^{-1}(v))=\xi/2$，すなわち，

$$\widetilde{d}(p_1,v) = \frac{\xi}{2} = \frac{1}{2}d_1(p,v) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\langle p_1,v\rangle_0$$

となることが直接の計算によってわかる． ∎

さて，上の例題の (3) に示したことから，ホップ写像 $\mathcal{P}$ を考えるとき，$\mathbf{S}^3$ にその標準計量 $\overline{g}_1$ を考えるならば，$\mathbf{S}^2$ には標準計量 g_1 の $\frac{1}{4}\left(=\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 倍した計量 $\frac{1}{4}g_1$ を考えるほうが自然である．実際，写像 $\mathcal{P}:(\mathbf{S}^3,\overline{g}_1)\to(\mathbf{S}^2,\frac{1}{4}g_1)$ はリーマン沈め込みとなっている．リーマン沈め込みの定義と基本的性質を述べることは後にまわして，ここではホップ写像の場合に，具体的にこれをみてみよう．

微分同相写像 $\Phi_1 : V_1\times U(1)\to\mathcal{P}^{-1}(V_1)$ によって $\overline{g}_1$ を表すことにする．まず V_1 上の局所座標系として立体射影 $\sigma_1 : V_1\to\mathbf{C}$ をとり，$\Phi_1^*\overline{g}_1$ を求める．$z=re^{\sqrt{-1}\xi}$, $a=e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおいて，局所座標系 (r,ξ,θ) を用いて，

$\mathcal{P}^{-1}(V_1) \subset \mathbf{R}^4$ と考えて Φ_1 を表すと次のようになる:

$$(r, \xi, \theta) \to \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(r\cos(\xi+\theta), r\sin(\xi+\theta), \cos\theta, \sin\theta).$$

したがって,

$$\Phi_1^*\overline{g}_1 = \frac{1}{(1+r^2)^2}(dr \otimes dr + r^2 d\xi \otimes d\xi) + \left(\frac{r^2}{1+r^2}d\xi + d\theta\right) \otimes \left(\frac{r^2}{1+r^2}d\xi + d\theta\right)$$

となる.ここで直交座標系 $(x = r\cos\xi,\ y = r\sin\xi)$ を用いる.まず $\mathcal{P}^{-1}(V_1)$ 上の 1 次微分形式 ω を局所座標系 (x, y, θ) を使って,

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{1+x^2+y^2} + d\theta$$

によって定義すると,

$$\Phi_1^*\overline{g}_1 = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + \omega \otimes \omega$$

となる.ここで右辺の第一項は,球面の標準計量の立体射影による表現 (1 章の例 10 参照) の $\frac{1}{4}$ 倍である.$\mathcal{P} \circ \Phi_1$ が $V_1 \times U(1)$ から V_1 への射影であることに注意すると, $\mathcal{P}^{-1}(V_1)$ 上において,$\overline{g}_1$ は次のように表現できる:

$$\overline{g}_1 = \mathcal{P}^*\left(\tfrac{1}{4}g_1\right) + \omega \otimes \omega.$$

同様に,微分同相写像 $\Phi_{-1} : V_{-1} \times U(1) \to \mathcal{P}^{-1}(V_{-1})$ によって $\overline{g}_1$ を表してみる.ここでは V_{-1} における局所座標系として,立体射影 $\sigma_{-1} : V_{-1} \to \mathbf{C}$ の複素共役 $\overline{\sigma_{-1}(v)}$ をとり,$\Phi_{-1}^*\overline{g}_1$ を求める.すなわち,局所座標系

$$(v, b) \to (\overline{\sigma_{-1}(v)}, b) = (x' + \sqrt{-1}\,y', e^{\sqrt{-1}\theta'}) \in \mathbf{C} \times U(1)$$

によって $\Phi_{-1}{}^*\overline{g}_1$ を計算すると,次のようになる:

$$\Phi_{-1}{}^*\overline{g}_1 = \frac{1}{(1+x'^2+y'^2)^2}(dx' \otimes dx' + dy' \otimes dy') + \omega' \otimes \omega'.$$

ただし,ω' は $\mathcal{P}^{-1}(V_{-1})$ 上の 1 次微分形式

$$\omega' = \frac{-y'\,dx' + x'\,dy'}{1+(x')^2+(y')^2} + d\theta'$$

である.ここで座標変換 $(x, y, \theta) \to (x', y', \theta')$ によって,$\mathcal{P}^{-1}(V_1) \cap \mathcal{P}^{-1}(V_{-1})$ において $\omega = \omega'$ であることが確かめられ,したがって,ω は $\mathbf{S}^3$ 全体で定義

された 1 次微分形式であることがわかる．

さらに $\mathbf{S}^3$ の各点 p において，$T_p\mathbf{S}^3$ の部分空間 $\mathcal{V}_p$, $\mathcal{H}_p$ をそれぞれ

$$\mathcal{V}_p = \ker d\mathcal{P}_p = \{v \in T_p\mathbf{S}^3 \mid d\mathcal{P}_p(v) = 0\},$$
$$\mathcal{H}_p = \ker \omega_p = \{v \in T_p\mathbf{S}^3 \mid \omega_p(v) = 0\}$$

によって定義すると，$T_p\mathbf{S}^3$ は $\mathcal{V}_p$ と $\mathcal{H}_p$ の直和として $\overline{g}_1$ に関して直交分解する:

$$T_p\mathbf{S}^3 = \mathcal{H}_p + \mathcal{V}_p.$$

この分解において $d\mathcal{P}_p$ を $\mathcal{H}_p$ に制限すると，$d\mathcal{P}_{p|\mathcal{H}_p}$ は $(\mathcal{H}_p, \overline{g}_1)$ から $(T_q\mathbf{S}^2, \frac{1}{4}g_1)$ への内積を保つ線形写像になっている．

2.5　リーマン沈め込みとリーマン被覆

本節では，リーマン沈め込みとリーマン被覆について基本的な性質を学ぶ．前節において説明したホップ束 $(\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^2, \mathcal{P})$ はリーマン沈め込みの重要な例である．

2.5.1　リーマン沈め込み

まず二つの多様体の間の沈め込みの定義から述べる．m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への C^∞ 級写像 $f: M \to N$ が全射であり $(f(M) = N)$，各点 $p \in M$ が正則点，すなわち f の微分 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ も全射であるとき，M から N への**沈め込み**，あるいは**サブマージョン**という．(ここでは $m > n$ と仮定している．$m = n$ のときは，局所微分同相写像のことで，後であらためて考察する．) 再び陰関数定理 (たとえば [3, 4, 7] 参照) を引用しよう:

(∗) 各点 $p \in M$ と N の点 $q = f(p)$ の座標近傍 $(U, (y^1, \ldots, y^n))$ に対して，p の座標近傍 $(W, (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m))$ が存在して，$f(W) \subset U$ であり，さらに f の局所座標表示 $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ が $y^i = x^i$ となるようにできる．

したがって，各点 $q \in N$ に対して，$F_q = f^{-1}(q) = \{p \in M \mid f(p) = q\}$ とおくと，F_q は M の $(m-n)$ 次元部分多様体である．(∗) において，$F_q \cap W$ が F_q の座標近傍となり，$(x^{n+1}, \ldots, x^m)$ を $F_q \cap W$ に制限したものが局所座

標系を与える.

さて, M の各点 p における接空間 T_pM において, df_p の核 $\ker df_p$ は $(m-n)$ 次元線形部分空間となり，それを簡単のため $\mathcal{V}_p$ と表す．このとき，$\mathcal{V}_p$ と部分多様体 F_q $(q = f(p))$ の点 p での接空間 T_pF_q を同一視することができ，$\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_p \,|\, p \in M\}$ は M の C^∞ 級 $(m-n)$ 次元分布を与える.

一般に，多様体 M の各点 p において，T_pM の d 次元部分空間 $\mathcal{D}_p$ が指定されているとき，M 上に d 次元**分布** $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p \,|\, p \in M\}$ が与えられているという．さらに各点 p に対して，それを含む開集合 W とその上の d 個のベクトル場 $E_1, \ldots, E_d$ があって，W の任意の点 p' において $\{E_1(p'), \ldots, E_d(p')\}$ が $\mathcal{D}_{p'}$ の基底となっているとき，分布 $\mathcal{D}$ は C^∞ 級であるという.

沈め込み $f : M \to N$ に対して，上に定義した $\mathcal{V}$ を**垂直分布**ということにする．さらに M の各点 p において，T_pM での $\mathcal{V}_p$ のベクトル空間としての補空間 $\mathcal{H}_p$ を与える C^∞ 級 $(m-n)$ 次元分布 $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_p \,|\, p \in M\}$ を，沈め込み $f : M \to N$ の**水平分布**ということにする.

水平分布 $\mathcal{H}$ を考察することにしよう．各点 p において，df_p を $\mathcal{H}_p$ に制限したものは, $\mathcal{H}_p$ から T_qN への線形同形写像となっている．したがって，各接ベクトル $v \in T_qN$ に対して，$df_p(\overline{v}) = v$ となる $\mathcal{H}_p$ の元 $\overline{v}$ がただ一つ決まる．さらに N 上のベクトル場 X に対して,

$$\overline{X}_p \in \mathcal{H}_p,\ df_p(\overline{X}_p) = X_{f(p)} \qquad (\forall p \in M)$$

を満たす M 上のベクトル場 $\overline{X}$ がただ一つ存在する．この $\overline{X}$ を，X の $\mathcal{H}$ への**リフト**あるいは**水平リフト**という.

また，ベクトル場 $p \to \overline{X}_p$ が C^∞ 級であることは以下の考察から確かめられる．まず, $p \in M$ が $(*)$ のような座標近傍 $(W, (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m))$ の点のとき，$\{(\partial/\partial x^\alpha)_p \,|\, \alpha = n+1, \ldots, m\}$ が自然に $\mathcal{V}_p$ の基底となる．次に必要ならば W を小さくとって, W 上の n 個のベクトル場 $\overline{E}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ で，W の各点 p において，$\{(\overline{E}_1)_p, \ldots, (\overline{E}_n)_p\}$ が $\mathcal{H}_p$ の基底となっているものをとる．各 $\overline{E}_i$ は,

$$\overline{E}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{\alpha=n+1}^{m} b_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \qquad (a_i^j, b_i^\alpha \in C^\infty(W))$$

と一意的に表すことができる．仮定より, 各点 p において, n 次正方行列 $\left(a_i^j(p)\right)$

は正則である．その逆行列を $\left(c^i_j(p)\right)$ とし，さらに $\widetilde{E}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c^j_i \overline{E}_j,\, d^\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c^j_i b^\alpha_j$ とおく．このとき，$i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} c^j_i \overline{E}_j + \sum_{\alpha=n+1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c^j_i b^\alpha_j \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \widetilde{E}_i + \sum_{\alpha=n+1}^{m} d^\alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

と表すことができる．したがって，N 上のベクトル場 X に対して，U において $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X^i(\partial/\partial y^i)$ とすると，$\overline{X}$ は W において $\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{m}(X^i \circ f)\widetilde{E}_i$ となり，たしかに $\overline{X}$ は C^∞ 級であることがわかる．

次に，N の C^∞ 級曲線 $c : (a,b) \to N$ を考える．$t_0 \in (a,b)$ を一つ任意に選び，$q = c(t_0)$ とおくとき，F_q の任意の点 p に対して，t_0 を含むある開区間 $(a', b')\,(\subset (a,b))$ において定義された M の C^∞ 級曲線 $\overline{c}$ で次の条件を満たすものが存在する:

$$\overline{c}(t_0) = p,\ f(\overline{c}(t)) = c(t),\ \overline{c}'(t) \in \mathcal{H}_{\overline{c}(t)} \quad (\forall t \in (a', b')). \tag{2.7}$$

なぜならば，上の議論のように座標近傍 $(U, (y^1, \ldots, y^n)), (W, (x^1, \ldots, x^m))$ をとり，$p \in F_q \cap W$ とする．ここで

$$c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t)), \qquad \overline{c}(t) = (\overline{c}^1(t), \ldots, \overline{c}^m(t))$$

とおくと，条件 (2.7) (の第二式と第三式) は次のように述べることができる:

$$\begin{aligned} &\overline{c}^i(t) = c^i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ &\frac{d\,\overline{c}^\alpha(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{dc^i(t)}{dt} d^\alpha_i(\overline{c}(t)) \qquad (\alpha = n+1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{2.8}$$

したがって，常微分方程式の一般論より，(2.7) の解 $\overline{c}(t)$ $(a' < t < b')$ の存在が確かめられた．

ここで二つの事柄に注意する．まず $\overline{c}$ の定義域 (a', b') が極大，すなわち，延ばせるだけ延ばしたギリギリの定義域であるとしても，一般に，c の定義域 (a,b) と一致するとは限らない．定義域 (a', b') は (2.7) における点 p にも依存する (図 2.3 参照)．各点 p において $\mathcal{V}_p = T_pF_q$ $(q = f(p), F_q = f^{-1}(q))$ であり，$\mathcal{V}_p$ は $(m-n)$ 次元部分多様体の接空間である．したがって，垂直分布に接する二つのベクトル場の交換子積は垂直分布に接する．しかし水平分布に関しては，これが成り立つとは限らない (たとえば [4, 7] 参照)．

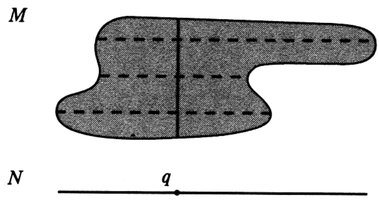


図 2.3

さて，M 上にリーマン計量 g をとり，$\mathcal{V}_p$ の直交補空間として $\mathcal{H}_p$ を定めると $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_p \mid p\in M\}$ はひとつの水平分布となる．この場合を考えてみる．まず，$(*)$ の局所座標系 $(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1},\ldots,x^m)$ を使って，g を

$$g=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i\otimes dx^j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{m} g_{i\alpha}(dx^i\otimes dx^\alpha+dx^\alpha\otimes dx^i)$$
$$+\sum_{\alpha,\beta=n+1}^{m} g_{\alpha\beta}dx^\alpha\otimes dx^\beta$$

と表す．$f(W)$ の点 q に対して，最後の項

$$\sum_{\alpha,\beta=n+1}^{m} g_{\alpha\beta}(y(q),x^{n+1},\ldots,x^m)dx^\alpha\otimes dx^\beta$$

が，F_q 上の誘導計量の，座標近傍 $(F_q\cap W,(x^{n+1},\ldots,x^m))$ における局所表示を与える．よって各点 $p\in W$ に対して，$(m-n)$ 次対称行列 $\bigl(g_{\alpha\beta}(p)\bigr)$ $(n+1\leqq\alpha,\beta\leqq m)$ は正則であり，$\bigl(g^{\alpha\beta}(p)\bigr)$ をその逆行列とすると，接ベクトル $\overline{v}=\sum_{i=1}^{m}\overline{v}^i(\partial/\partial x^i)_p\in T_pM$ が $\mathcal{H}_p$ に属する条件は，$g(\overline{v},(\partial/\partial x^\alpha)_p)=0$ $(\alpha=n+1,\ldots,m)$ より

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{v}^i g_{i\alpha}+\sum_{\beta=n+1}^{m}\overline{v}^\beta g_{\beta\alpha}=0\qquad(\alpha=n+1,\ldots,m)$$

となる．ここで両辺に $g^{\alpha\gamma}$ をかけて α について和をとると，$\sum_{\alpha=n+1}^{m} g_{\beta\alpha}g^{\alpha\gamma}=\delta_{\beta\gamma}$ より，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{m}\overline{v}^i g_{i\alpha}g^{\alpha\gamma}+\overline{v}^\gamma=0\qquad(\gamma=n+1,\ldots,m)$$

となる．よって $\overline{v}\in\mathcal{H}_p$ のための条件は，

$$\overline{v}^\gamma=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{m}\overline{v}^i g_{i\alpha}g^{\alpha\gamma}\qquad(\gamma=n+1,\ldots,m)$$

である．したがって

$$\widetilde{E}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=n+1}^{m} d_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \qquad \left(d_i^\alpha = \sum_{\beta=n+1}^{m} g_{i\beta} g^{\beta\alpha}\right)$$

と定義すると，$\{\widetilde{E}_i\}$ は各点 $p \in W$ において，

$$df_p(\widetilde{E}_i(p)) = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(p)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

を満たす $\mathcal{H}_p$ の基底を与えることが確かめられる．すなわち，$\widetilde{E}_i$ は W における $(\partial/\partial y^i)$ の水平リフトである．

さて以上の考察に続いて，次の命題の中で新しい概念と用語を説明しよう．

命題 2.3　$f : M \to N$ を連結多様体 M から連結多様体 N への沈め込みとする．水平分布 $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_p \mid p \in M\}$ が与えられ，$\mathcal{H}$ は次の条件を満たすとする．

(**)　N の任意の C^∞ 級曲線 $c : (a, b) \to N$ と任意のパラメータの値 $t_0 \in (a, b)$，および 任意の点 $p \in F_q$ $(q = c(t_0))$ に対して，点 p をとおる c の水平リフトが存在する．すなわち，条件 (2.7) を満たす M の C^∞ 級曲線 $\overline{c} : (a, b) \to M$ が c と同じ定義域 (a, b) において存在する．

このとき次の (1), (2) が成り立つ．

(1)　M, N, $f : M \to N$ の組は，ある多様体 F をファイバーとする C^∞ 級**局所自明束**になる．すなわち，N の任意の点 q_0 に対して，それを含む開集合 U と，$f^{-1}(U)$ から U と多様体 F の直積 $U \times F$ への微分同相写像 $\Psi : f^{-1}(U) \to U \times F$ があって，$\pi_U \circ \Psi = f$ を満たす．ただし，π_U は $U \times F$ から U への自然な射影を表す．とくに N の各点 q に対して，$F_q = f^{-1}(q)$ に Ψ を制限すると，F_q から $\{q\} \times F$ に微分同相写像を得る．M, N, F_q をそれぞれ局所自明束の**全空間**，**底空間**，点 q 上の**ファイバー**とよび，Ψ を U 上の**局所自明化写像**という．

(2)　M と N 上にそれぞれリーマン計量 g と h が与えられ，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{V}$ の直交補空間として与えられているとする．さらに $f : M \to N$ は**リーマン沈め込み**とする．すなわち各点 $p \in M$ において，f の微分 df_p を $\mathcal{H}_p$ に制限して得られる $\mathcal{H}_p$ から $T_{f(p)}N$ への線形同形が $\mathcal{H}_p$ 上の内積 g_p と $T_{f(p)}N$ の内積 $h_{f(p)}$ を保つとする．このとき，N の任意の二点 q と r に対して，それらの上

のファイバー F_q と F_r は命題 2.1 の意味において平行である．

証明 q_0 を N の点とし，$(U, \phi = (y^1, \ldots, y^n))$ を q_0 を含む座標近傍とする．ここでは簡単のため，$\phi(q_0) = (0, \ldots, 0)$, $\phi(U) = \mathbf{B}^n(a)$ ($\mathbf{R}^n$ の原点中心の半径 a の球体) とし，q_0 と $\mathrm{O} = (0, \ldots, 0)$，$U$ と $\mathbf{B}^n(a)$ をそれぞれ同一視して考える．$F = f^{-1}(\mathrm{O})$ とおく．単位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ の各点 v に対して，$c_v(t) = tv$ ($|t| < a$) とおき，F の各点 p に対して，$\overline{c}_{v,p}(t)$ ($|t| < a$) を $\overline{c}_{v,p}(0) = p$ を満たす c_v の水平リフトとする．このとき，$\mathbf{B}^n(a) \times F$ から M の中への写像 Φ を

$$\Phi(tv, p) = \overline{v}_{v,p}(t) \qquad (|t| < a,\ v \in \mathbf{S}^{n-1},\ p \in F)$$

と定めると，水平リフトを定める微分方程式 (2.8) の解の一意性および係数に関する微分可能性により，Φ は $\mathbf{B}^n(a) \times F$ から $f^{-1}(\mathbf{B}^n(a))$ への微分同相写像であることが従う．よってその逆写像を Ψ とおけば，Ψ は $\mathbf{B}^n(a)$ 上の局所自明化写像を与える．

さらに q, r を N 上の任意の二点とする．N は連結，したがって弧状連結と仮定しているので，q と r を結ぶ C^∞ 級曲線を一つ選ぶ．それを $c : [a, b] \to N$ とする．$q = c(a)$ 上のファイバー F_q の点 p に対して，$\overline{c}_p : [a, b] \to M$ を $\overline{c}_p(a) = p$ を満たす c の水平リフトとする．ここで c は閉区間 $[a, b]$ を含むある開区間で定義されていると考えている．$\overline{c}_p$ も同様である．$\Pi(c; a, b)(p) = \overline{c}_p(b)$ とおくと，$\Pi(c; a, b)$ は c の水平リフトによって定義される F_q から F_r への微分同相写像である．

次に (2) における条件のもとに，$h(\overline{c}_p{}'(t), \overline{c}_p{}'(t)) = g(c'(t), c'(t))$ ($a \leqq t \leqq b$) より，$\overline{c}_p$ の長さ $L(\overline{c}_p)$ は c の長さ $L(c)$ に等しい．ここで c が区分的に C^∞ 級の曲線の場合，C^∞ 級となる各部分区間に上の議論を適用すればよいので，c は区分的に C^∞ 級であるとしてよい．これらのことに注意して，F_q と F_r は命題 2.1 の意味において平行であることを以下において示そう．まず $\gamma : [a, b] \to M$ を F_q の点 p から出発する区分的に C^∞ 級の曲線で $\gamma(b) \in F_r$ を満たすとする．$f(\gamma(t))$ ($a \leqq t \leqq b$) は q と r を結ぶ N の曲線を定める．これを c とおき，$\overline{c}_p : [a, b] \to M$ を点 p から出発する c の水平リフトとする．このとき f がリーマン沈め込みであることにより，$h(c'(t), c'(t)) \leqq g(\gamma'(t), \gamma'(t))$ ($a \leqq t \leqq b$) である．したがって $L(c) \leqq L(\gamma)$ である．ここで $d_h(q, r) \leqq L(c)$ より $d_h(q, r) \leqq L(\gamma)$ となり，これが上のようなすべての p と γ に対して成り立つことにより，

$$d_h(q, r) \leqq d_g(p, F_r) \qquad (\forall p \in F_q) \tag{2.9}$$

が成り立つ．次に $d_h(q, r)$ の定義により，q と r を結ぶ区分的に C^∞ 級の曲線の列 $\{c_i : [a, b] \to N \mid i = 1, 2, \ldots\}$ で，$d_h(q, r) = \lim_{i \to \infty} L(c_i)$ を満たすものを選ぶ．各 c_i に対して，点 $p \in F_q$ より出発する c_i の水平リフト $\overline{c}_{i,p}$ は，点 p とファイバー F_r の点を結ぶ区分的に C^∞ 級の曲線である．よって $L(\overline{c}_{i,p}) \geqq d_g(p, F_r)$ である．したがって，

$$d_h(q, r) = \lim_{i \to \infty} L(c_i) = \lim_{i \to \infty} L(\overline{c}_{i,p}) \geqq d_g(p, F_r)$$

となり，(2.9) とあわせて $d_h(q,r) = d_g(p,F_r)$ $(\forall p \in F_q)$ が従う．これは，F_q と F_r が命題 2.1 の意味で平行であることを示している．∎

注意 もし c が q と r を結ぶ最短線であれば，c の水平リフトはすべて F_q と F_r の距離を実現する M の最短線である．

2.5.2 主束の定義

主束の定義から述べよう．M と N を多様体，G をリー群とする．M から N の上への C^∞ 級写像 $\pi : M \to N$ と，G の M への C^∞ 級右作用 $\sigma : M \times G \to M$ が与えられ，以下の条件 (i), (ii) を満たすとき，組 $(M, N, \pi : M \to N)$ を N 上の構造群 G の**主束**あるいは簡単に G–主束という．

(i) σ はファイバーを保つ，すなわち

$$\pi(p \cdot a) = \pi(p) \qquad (\forall (p,a) \in M \times G).$$

(ここで $\sigma(p,a) = p \cdot a$ と記した．)

(ii) N の各点 q に対して，q を含む N の開集合 U と，$\pi^{-1}(U)$ から $U \times G$ への微分同相写像 $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ があって，

$$\Psi(p) = (\pi(p), \psi(p)) \qquad (\forall p \in \pi^{-1}(U))$$

を満たす．ただし，ψ は

$$\psi(p \cdot a) = \psi(p)a \qquad (\forall p \in \pi^{-1}(U),\ \forall a \in G)$$

を満たす $\pi^{-1}(U)$ から G への C^∞ 級写像である．

条件 (ii) より，G–主束 $(M, N, \pi : M \to N)$ は局所自明束であり，Ψ が U 上の局所自明化写像を与える．さらに M の各点 p に対して，p をとおるファイバー $\pi^{-1}(q)$ $(q = \pi(p))$ は，p をとおる G–軌道 $p \cdot G = \{p \cdot a \,|\, a \in G\}$ と一致する．なぜならば，まず $p \cdot G \subset \pi^{-1}(q)$ は明らか．逆に $p' \in \pi^{-1}(q)$ をとる．G のある元 a があって，$p' = p \cdot a$ となることを示したい．(U, Ψ) と ψ を条件 (ii) を満たす C^∞ 級写像とする．G の元 $a = \psi(p)^{-1}\psi(p')$ をとる．このとき，

$$\psi(p \cdot a) = \psi(p \cdot (\psi(p)^{-1}\psi(p'))) = \psi(p)(\psi(p)^{-1}\psi(p')) = \psi(p')$$

より,

$$\Psi(p\cdot a) = (\pi(p\cdot a), \psi(p\cdot a))$$
$$= (\pi(p), \psi(p')) = (\pi(p'), \psi(p')) = \Psi(p')$$

となり, Ψ は 1 対 1 であるから, $p\cdot a = p'$ が従う.

2.4 節と 2.5 節で述べたように, ホップ束 $(\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^2, \mathcal{P} : \mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2)$ は $\mathbf{S}^2$ 上の構造群 $U(1)$ の主束の例を与え, さらに $U(1)$ 作用は リーマン多様体 $(\mathbf{S}^3, \overline{g}_1)$ への等長作用であり, $\mathcal{P}$ は $(\mathbf{S}^3, \overline{g}_1)$ から $(\mathbf{S}^2, \frac{1}{4}g_1)$ へのリーマン沈め込みである. これをより一般的に考えてみる.

命題 2.4 多様体 N 上の構造群 G の主束 $(M, N, \pi : M \to N)$ を考える. G の元 a に対して, $R_a(p) = a\cdot p$ $(\forall p \in M)$ とおく.

(1) M 上に与えられた水平分布 $\mathcal{H}$ が G の右作用によって不変であるとする. すなわち $dR_a(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{p\cdot a}$ $(\forall p \in M, \forall a \in G)$ とする. このとき, 命題 2.3 の水平リフトに関する仮定 $(**)$ が成り立つ.

(2) M 上のリーマン計量 g が与えられ, 垂直分布 $\mathcal{V}$ の直交補空間として与えられる水平分布 $\mathcal{H}$ を考える. また, 各 $R_a : M \to M$ が (M, g) の等長変換となっているとする. このとき $\mathcal{H}$ は G の作用で不変であり, さらに N 上のリーマン計量 h が存在して, $\pi : (M, g) \to (N, h)$ はリーマン沈め込みになる.

証明 G の各元 a に対して, 主束の定義より $dR_a(\mathcal{V}_p) = \mathcal{V}_{p\cdot a}$ が成り立つ. まず $dR_a(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{p\cdot a}$ $(\forall p \in M,\ \forall a \in G)$ と仮定しよう. このとき, 任意の C^∞ 級曲線 $c : (a, b) \to N$ に対して, $\overline{c} : (a', b') \to M$ をその水平リフトとすれば, $R_a(\overline{c})$ も $\overline{c}$ と同じ区間 (a', b') で定義された c の水平リフトであることがわかる. 以下において, $\overline{c}$ の定義域 (a', b') を c の定義域 (a, b) まで拡張できることを確かめよう.

まず $t_0 \in (a', b')$ を任意にとり, $p = \overline{c}(t_0)$, $q = \pi(p) = c(t_0)$ とおく. $\pi^{-1}(c(b'))$ の点 p' を一つ選び, $\overline{c}_{p'}$ を $\overline{c}_{p'}(b') = p'$ を満たす c の水平リフトとする. $\overline{c}_{p'}$ の定義区間 I は b' を含んでいるので, $\tau < b'$ となる $\tau \in I$ を一つ選ぶ. このとき, $\overline{c}_{p'}(\tau)$ は $\pi^{-1}(c(\tau))$ の元である. したがって, $\overline{c}$ は $t = \tau$ で定義されていることと, 各 $a \in G$ に対して, $R_a(\overline{c})$ が $p\cdot a$ をとおる (a', b') で定義された c の水平リフトであることにより, $R_a(\overline{c}(\tau))) = \overline{c}_{p'}(\tau)$ となる G の元 a がただ一つ定まることになる. ここで水平リフトの一意性より, $R_a(\overline{c}_{p'})$ と $\overline{c}$ は共通の定義域で一致していなければならない. とくに $R_a(\overline{c})$ は b' をこえて定義されているので, 結局 $b' = b$ としてよいことがわかる. 同様に $a' = a$ としてよい. つまり仮定 $(**)$ が満たされることになる. これで (1) が示された.

次に残りの主張 (2) に答えよう．$\mathcal{H}$ が G の作用で不変であることは明らかであろう．N 上のベクトル場 X に対して，$\overline{X}$ でもってその水平リフトを表すとする．各点 $p \in M$ と各元 $a \in G$ に対して，$dR_a(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{p\cdot a}$ と $d\pi_{p\cdot a} \circ dR_a = d\pi_p$ より $\overline{X}_{p\cdot a} = dR_a(\overline{X}_p)$ が従う．さらに R_a が (M, g) の等長変換であることにより，N 上の二つのベクトル場 X と Y に対して，

$$g(\overline{X}_{p\cdot a}, \overline{Y}_{p\cdot a}) = g(dR_a(\overline{X}_p), dR_a(\overline{Y}_p)) = g(\overline{X}_p, \overline{Y}_p)$$

が成り立つ．これにより，各 $q \in N$ に対して $\pi^{-1}(q)$ の点 p をとり，$h(X_q, Y_q) = g(\overline{X}_p, \overline{Y}_p)$ とおけば，右辺が p のとり方によらないことから，N 上のリーマン計量 h が定まる．これが求めるものである．∎

練習問題 2.1　ホップ束 $\mathcal{P}: \mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$ を考える．2.4 節における記号をそのまま用いることにする．$\mathbf{S}^3$ 上の標準計量は，$\overline{g}_1 = \mathcal{P}^*(\frac{1}{4}g_1) + \omega \otimes \omega$ と表すことができた．ここでは，$\mathbf{S}^2$ 上のリーマン計量 h と 1 次微分形式 η に対して，ω の代わりに $\widetilde{\omega} = \omega + \mathcal{P}^*\eta$ を選んで定義される $\mathbf{S}^3$ 上のリーマン計量 $\widetilde{g} = \mathcal{P}^*h + \widetilde{\omega} \otimes \widetilde{\omega}$ を考える．このとき $\widetilde{g}$ が定める水平分布は，$\widetilde{\mathcal{H}} = \{v \in T\mathbf{S}^3 \,|\, \widetilde{\omega}(v) = 0\}$ で与えられる．さらに $U(1)$ 作用はこの計量 $\widetilde{g}$ に対しても等長的であり，ホップ写像 $\mathcal{P}: (\mathbf{S}^3, \widetilde{g}) \to (\mathbf{S}^2, h)$ はリーマン沈め込みである．また各ファイバーは長さ 2π の閉測地線である．これらを検証せよ．

練習問題 2.2　連結多様体 M から N への沈め込み $f: M \to N$ に対して，N の各点 q の逆像 $f^{-1}(q)$ がコンパクトであるとする．このとき任意の水平分布に対して，命題 2.3 の水平リフトに関する仮定 (**) が成り立つことを示せ．

2.5.3　局所自明束と主束の例

以下において，与えられた多様体を底空間とするいくつかの基本的な局所自明束と主束を説明する．

多様体 M の接ベクトル全体のなす集合 $TM = \{v \,|\, v \in T_pM,\ p \in M\}$ を考える．点 p での接ベクトル v に対して $\pi_{TM}(v) = p$ とおき，TM から M への写像を定義する．これを TM から M への (自然な) **射影**という．$(U, (x^1, \ldots, x^m))$ を M の座標近傍とする．${\pi_{TM}}^{-1}(U)$ の各接ベクトル v を $v = \sum_{i=1}^{m} v^i(\partial/\partial x^i)_p$ と一意的に表し，$\phi(v) = (v^1, \ldots, v^m)\,(\in \mathbf{R}^m)$，$\Phi(v) = (\pi_{TM}(v), \phi(v))$ とおく．このとき，Φ は ${\pi_{TM}}^{-1}(U)$ から $U \times \mathbf{R}^m$ への全単射を与える．ここで $(y^1, \ldots, y^m)$ を別の局所座標系とし，$v = \sum_{i=1}^{m} \overline{v}^i(\partial/\partial y^i)_p$ に対して，$\psi(v) = (\overline{v}^1, \ldots, \overline{v}^m)$，$\Psi(v) = (\pi_{TM}(v), \psi(v))$ とおけば，座標変換の

規則から $(p,\overline{v}^1,\ldots,\overline{v}^m)=\Psi\circ\Phi^{-1}(p,v^1,\ldots,v^m)$ は次のように与えられる:

$$\begin{pmatrix}\overline{v}^1\\ \vdots\\ \overline{v}^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^m\end{pmatrix}.$$

このように，$\Psi\circ\Phi^{-1}$ は $U\times\mathbf{R}^m$ からそれ自身への微分同相写像である．このことから，TM は次の性質 (i), (ii) を満たす多様体となる．

(i) M の座標近傍 $(U,(x^1,\ldots,x^m))$ に対して，上で定めた写像 $\Phi:{\pi_{TM}}^{-1}(U)\to U\times\mathbf{R}^m$ は微分同相写像であり，$(x^1\circ\pi_{TM}(v),\ldots,x^m\circ\pi_{TM}(v),\phi(v))$ は ${\pi_{TM}}^{-1}(U)$ 上の局所座標系を与える．

(ii) $\pi_{TM}:TM\to M$ は $\mathbf{R}^m$ をファイバーとする C^∞ 級局所自明束となり，上の写像 Φ が U 上の局所自明化写像である．さらに Φ を ${\pi_{TM}}^{-1}(p)=T_pM$ に制限すると，T_pM からベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ への線形同形写像を得る．

この (TM,M,π_{TM}) の組を多様体 M の**接束**という．($\mathbf{R}^n$ に埋め込まれた部分多様体 M の場合，$TM=\{(p,v)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\,|\,p\in M,\ v\in T_pM(\subset\mathbf{R}^n)\}$ と理解してもよい．このとき TM は $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ の $2m$ 次元部分多様体となる．)

次に，集合 $T^*M=\{\omega\,|\,\omega\in T_p^*M,\ p\in M\}$ を考える．これに対しても TM と同様に，T^*M から M への射影 π_{T^*M} を定義する．このとき (T^*M,M,π_{T^*M}) の組は次のような局所自明束である．M の座標近傍 $(U,(x^1,\ldots,x^m))$ に対して，${\pi_{T^*M}}^{-1}(U)$ の各元 ω を $\omega=\sum_{i=1}^m\omega_i dx^i$ と一意的に表し，$\phi(\omega)=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, $\Phi(\omega)=(\pi_{T^*M}(\omega),\phi(\omega))$ とおくとき，Φ は ${\pi_{T^*M}}^{-1}(U)$ から $U\times\mathbf{R}^m$ への C^∞ 級微分同相写像であり，U 上の局所自明化写像を与える．

ここで $(y^1,\ldots,y^m)$ を別の局所座標系とすれば，$\omega=\sum_{i=1}^m\overline{\omega}_i dy^i$ に対して，$\psi(\omega)=(\overline{\omega}_1,\ldots,\overline{\omega}_m)$, $\Psi(\omega)=(\pi_{T^*M}(\omega),\psi(\omega))$ とおき，局所自明化写像が得られ，$(p,\overline{\omega}_1,\ldots,\overline{\omega}_m)=\Psi\circ\Phi^{-1}(p,\omega_1,\ldots,\omega_m)$ は次のように与えられる:

$$(\overline{\omega}_1,\ldots,\overline{\omega}_m)=(\omega_1,\ldots,\omega_m)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\end{pmatrix}^{-1}.$$

この (T^*M, M, π_{T^*M}) の組を，多様体 M の**余接束**という．

接束を考えると，M 上のベクトル場 X は，$\pi_{TM} \circ X = i_M$ (i_M は M の恒等写像) を満たす M から TM への C^∞ 級写像であるといい換えられる．同様に余接束を考えると，M 上の 1 次微分形式 ω は，$\pi_{T^*M} \circ \omega = i_M$ を満たす M から T^*M への C^∞ 級写像であるといい換えられる．

一般に，局所自明束 $(M, N, f : M \to N)$ において，$f \circ \sigma = i_N$ を満たす底空間 N から全空間 M への C^∞ 級写像 σ を N 上の**切断**という．σ の定義域が N の開集合 U のときには，U 上の切断あるいは局所切断という．ここで，$\Phi = (f, \phi) : f^{-1}(U) \to U \times F$　を U 上の局所自明化写像とすれば，U から F への C^∞ 級写像 η に対して，$\sigma(p) = \Phi^{-1}(p, \eta(p))$ $(p \in U)$ は U 上の切断を定め，逆に U 上の切断 σ に対して，$\eta = \phi \circ \sigma$ は U から F への C^∞ 級写像を定める．

さて，多様体 M の各点 p における接空間 T_pM の順序も考慮に入れた基底を**標構** (あるいは枠) といい，それら全体のなす集合を $F_p(M)$ と記す．さらに，

$$F(M) = \bigcup \{(v_1, \ldots, v_m) \in F_p(M) \,|\, p \in M\}$$

とおき，$F(M)$ から M への自然な射影を $\pi_{F(M)}$ とする．このとき，TM と同様に $F(M)$ は多様体になり，$(F(M), M, \pi_{F(M)})$ は一般線形群 $GL(m, \mathbf{R})$ を構造群とする主束となる．この $GL(m, \mathbf{R})$ の $F(M)$ への右作用 ρ は

$$\rho(\xi, A) = (w_1, \ldots, w_m) \quad (\xi = (v_1, \ldots, v_m) \in F(M),\ A \in GL(m, \mathbf{R})),$$
$$w_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \quad (j = 1, \ldots, m), \quad A = \big(a_{ij}\big)$$

によって与えられる．これは，

$$\xi \cdot A = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

と表すと理解しやすい．

ここで $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ を M の座標近傍とする．U の各点 p において，$\{(\partial/\partial x^1)_p, \ldots, (\partial/\partial x^m)_p\}$ が T_pM の基底を与え，$F_p(M)$ の元 $((\partial/\partial x^1)_p, \ldots, (\partial/\partial x^m)_p)$ を定める．したがって，$F_p(M)$ の任意の元 $\xi = (v_1, \ldots, v_m)$ は

$$(v_1, \dots, v_m) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p \right) \cdot A \qquad (A \in GL(m, \mathbf{R}))$$

と一意的に表される．$\phi(\xi) = A, \Phi(\xi) = (p, \phi(\xi))$ とおくと，Φ は ${\pi_{F(M)}}^{-1}(U)$ から $U \times GL(m, \mathbf{R})$ への全単射となり，$\phi(\xi \cdot A) = \phi(\xi)A$ が成り立つ．TM の場合と同様に $F(M)$ は多様体となり，

$$(x^1 \circ \pi_{F(M)}, \dots, x^m \circ \pi_{F(M)}, a_{11}, \dots, a_{mm})$$

が ${\pi_{F(M)}}^{-1}(U)$ 上の局所座標系を与える．

一般に，M の開集合 U 上の $F(M)$ の切断，すなわち U の各点でその接空間の標構となっている m 個のベクトル場の列 $(X_1, \dots, X_m)$ を U 上の**標構場**という．したがって $((\partial/\partial x^1)_p, \dots, (\partial/\partial x^m)_p)$ は，座標近傍 $(U, (x_1, \dots, x_m))$ における自然な標構場ということになる．

次に，リーマン多様体 (M, g) を考える．TM における単位接ベクトル全体のなす部分集合を $U(M)$ とおき，射影 π_{TM} を $U(M)$ に制限したものを $\pi_{U(M)}$ と記す．$U(M)$ は TM の $(2m-1)$ 次元部分多様体となり，$(U(M), M, \pi_{U(M)})$ は，ユークリッド空間の単位球面をファイバーとする局所自明束となる ($m = 2$ のときは，ファイバーは単位円周である)．これをリーマン多様体 (M, g) の**単位接球面束**という．M の標構全体のなす $GL(m, \mathbf{R})$–主束 $F(M)$ においてリーマン計量に関する正規直交基底全体のなす集合を $O(M)$ と記し，射影 $\pi_{F(M)}$ を $O(M)$ に制限して得られる $O(M)$ から M への自然な射影を $\pi_{O(M)}$ と表す．$O(M)$ は $F(M)$ の $m(m+1)/2$ 次元部分多様体になり，さらに $(O(M), M, \pi_{O(M)})$ は直交群 $O(m)$ を構造群とする主束となる．ここで開集合 U 上の標構場 $(X_1, \dots, X_m)$ に対して，シュミットの直交化を適用する．すなわち，帰納的に

$$E_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|},$$

$$E_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} \qquad (Y_2 = -g(E_1, X_2)E_1 + X_2),$$

$$\vdots$$

$$E_i = \frac{Y_i}{\|Y_i\|} \qquad \left(Y_i = -\sum_{j=1}^{i-1} g(E_j, X_i)E_j + X_i\right)$$

$$\vdots$$

と, $(E_1, \ldots, E_m)$ を定義する．こうして得られるベクトル場の列 $(E_1, \ldots, E_m)$ は U 上の $O(M)$ の切断，すなわち U 上の正規直交標構場を定める．

▶ **例 1** $(m+1)$ 次直交行列 A は，各列を $\mathbf{R}^{m+1}$ の元 (列ベクトル) と考えて，$\mathbf{R}^{m+1}$ の正規直交基底のなす $(m+1)$ 個のベクトルの組 $A = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ とみなす．ここで便宜上番号は 0 からはじめる．第 1 列のベクトル v_0 は，単位球面 $\mathbf{S}^m$ の点 v_0，残りの列のベクトルの組 $(v_1, \ldots, v_m)$ は接空間 $T_{v_0}\mathbf{S}^m$ の正規直交標構とみなし，A を $O(\mathbf{S}^m)$ の元と考えることができる．また，$O(m)$ の $O(\mathbf{S}^m)$ への右作用は，

$$A \cdot B = (v_0, (v_1, \ldots, v_m)B) = (v_0, v_1, \ldots, v_m)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

となる．したがって，$O(m)$ を $O(m+1)$ の部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid B \in O(m) \right\}$$

と同一視すると，$O(\mathbf{S}^m)$ と $O(\mathbf{S}^m)$ から $\mathbf{S}^m$ への射影をそれぞれ $O(m+1)$ と $O(m+1)$ から $O(m)$ の軌道空間 $O(m+1)/O(m)$ への射影として理解することができる．

ここで，$O(m+1)$ を $SO(m+1)$ に，$O(m)$ を $SO(m)$ に置き換えることができる．これは，球面の "向き" と関係している． □

一般に，m 次元 (実) ベクトル空間 V とその順序も考慮した基底，すなわち標構の集合 $F(V)$ を考える．二つの標構 $\xi = (v_1, \ldots, v_m)$ と $\eta = (w_1, \ldots, w_m)$ に対して，$\xi = \eta \cdot A$，すなわち $v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \ (i = 1, \ldots, m)$ によって一意的に $GL(m, \mathbf{R})$ の元 $A = (a_{ij})$ が定まる．このとき，行列 A の行列式 $\det A$ が正のとき，ξ と η は V に同じ**向き**を定めるといい，$\xi \sim \eta$ と表せば，$\sim$ は同値関係になる．この関係で $F(V)$ は二つに分割されるが，そのいずれかを指定することを V に**向きを与える**という．向きが与えられた V において，指定された同値類に属する標構は，V の**正の向きを定める**，あるいは正

の向きであるという．たとえば，数ベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ においては，標準基底 $e_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_m = (0,\ldots,0,1)$ のなす標構 $(e_1,\ldots,e_m)$ が定める向きを正の向きと考える．

次に，向き付けられた多様体の定義を述べる．m 次元多様体 M において，各点の接空間に向きが指定されていて，さらに任意の点に対して，ある近傍 U で定義された m 個のベクトル場からなる標構場 $(X_1,\ldots,X_m)$ が存在して，U の各点 p において $((X_1)_p,\ldots,(X_m)_p)$ が T_pM の正の向きを定めるとき，M を**向き付けられた多様体**という．また，このように滑らかに向きを指定できるとき，M を**向き付け可能な多様体**といい，そうでなければ，M は向き付け不可能であるという．向き付けられた多様体において，正の向きの標構全体からなる集合を $F^+(M)$ と表せば，$\pi_{F(M)}$ を $F^+(M)$ に制限することによって，M 上の $GL^+(m,\mathbf{R})$ 主束が得られる．ただし，

$$GL^+(m,\mathbf{R}) = \{A \in GL(m,\mathbf{R}) \mid \det A > 0\}$$

とする．さらにリーマン計量を与えておけば，$O^+(M) = O(M) \cap F^+(M)$ とおいて，$SO(m)$ 主束を得る．

さて，$GL^+(m,\mathbf{R})$ の $F(M)$ への右作用による軌道空間 $F(M)/GL^+(m,\mathbf{R})$ は m 次元多様体になり，自然な射影 $\pi : F(M)/GL^+(m,\mathbf{R}) \to M$ は 2 対 1 の局所微分同相写像である (次項で説明する 2 重の被覆写像である)．M が連結のとき，あるいは M の連結成分をあらためて M と考えるとき，$F(M)/GL^+(m,\mathbf{R})$ が二つの連結成分からなるならば M は向き付け可能となり，射影は各成分を M に微分同相に移す．一方 $F(M)/GL^+(m,\mathbf{R})$ が連結ならば M は向き付け不可能であり，$F(M)/GL^+(m,\mathbf{R})$ 自身は向き付け可能となる．(3.3.4 項において微分形式を学んだ後，これらの事実の検証を試みてほしい．)

たとえば，$\mathbf{R}^{m+1}$ の中の滑らかな境界をもつ領域 A の境界 bA は向き付け可能である．なぜならば，ν を bA 上の外向きの単位法ベクトルとし，bA の点 p における接空間 $T_p(bA)$ の標構 $(v_1,\ldots,v_m)$ に対して，$(\nu(p),v_1,\ldots,v_m)$ が $\mathbf{R}^{m+1}$ の正の標構となるとき，$(v_1,\ldots,v_m)$ は正の向きであると定義する．これによって bA に向きが定まる (もし内向きの単位法ベクトル $-\nu$ によって bA の向きを定めると，それはもう一つの別の向きを与えることになる)．

一般に，向き付けられた $(m+1)$ 次元リーマン多様体 $\overline{M}$ の超曲面 M に対して，

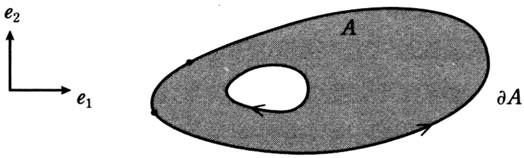


図 2.4

M 上に単位法ベクトル場 ν が存在すれば, 上記のようにして, M にひとつの向きを定めることができる. 逆に M が向き付けられているとき, M の点 p における接空間 T_pM の正の標構 $(v_1,\ldots,v_m)$ に対して, $(\nu(p),v_1,\ldots,v_m)$ が $T_p\overline{M}$ の正の向きを与えるとして, 単位法ベクトル $\nu(p)$ を定義すると, $\nu=\{\nu(p)\,|\,p\in M\}$ は M 上の単位法ベクトル場を定める. (直観的ないい方をすると, 超曲面 M に ν の側を表, 反対側を裏とすることによって, $\overline{M}$ から見て表と裏の区別がつく超曲面 M が向き付け可能であるということになる. たとえば, メビウスの帯は表裏の区別が付かない.)

2.5.4　リーマン被覆と例

命題 2.3 の局所自明束の定義において, 各ファイバーは部分多様体となっているものを考えた. この定義においては, 全空間, 底空間, ファイバーすべて多様体とした. ファイバーを離散集合に代えると, 被覆空間, あるいは被覆写像の定義になる. すなわち, 多様体 M から多様体 N への C^∞ 級写像 $f:M\to N$ が**被覆写像**であるとは, 全射かつ N の任意の点 p に対してある開近傍 U が存在し, $f^{-1}(U)$ は互いに交わることのない開集合 $\{U_i\}_{i\in I}$ の和集合 $f^{-1}(U)=\bigcup_{i\in I}U_i$ として表され, 各 U_i が f によって U に同相に移ることである. 多様体 M と被覆写像 $f:M\to N$ の組を N の**被覆空間**という. たとえば, 数直線 $\mathbf{R}$ から単位円周 $\mathbf{S}^1\,(=U(1)\subset\mathbf{C}\setminus\{0\})$ への写像 $t\to\exp(2\pi\sqrt{-1}\ t)$ は被覆写像である. また整数 $k\in\mathbf{Z}$ に対して, $\mathbf{S}^1$ からそれ自身への写像 $z\to z^k$ は $|k|$ 重の被覆写像である.

リーマン多様体 (M,g) からリーマン多様体 (N,h) への被覆写像 $f:M\to N$ が局所等長写像であるとき, すなわち $g=f^*h$ のとき, $f:M\to N$ を**リーマン被覆**という. リーマン被覆 $f:M\to N$ は, M の測地線を同じ速さの N の

測地線に移し，N の測地線のリフト (2.5.1 項，命題 2.5 参照) も同じ速さの M の測地線である．以下において，平坦トーラス，実射影空間，レンズ空間など基本的な例を説明しよう．

▶ **例 2**　$\mathbf{R}^m = \{(x^1, \ldots, x^m) \,|\, x^1, \ldots, x^m \in \mathbf{R}\}$ から m 次元トーラス $\mathbf{T}^m = \mathbf{S}^1 \times \cdots \times \mathbf{S}^1$ への写像

$$\pi_0((x^1, \ldots, x^m)) = (\exp(2\pi\sqrt{-1}\,x^1), \ldots, \exp(2\pi\sqrt{-1}\,x^m))$$

は被覆写像である．さらにユークリッド計量 $g_0 = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^m \otimes dx^m$ は $\mathbf{R}^m$ における移動 $\tau_a(v) = v + a$ $(a \in \mathbf{R}^m)$ によって不変であるから，$\mathbf{T}^m$ 上のリーマン計量 h_0 が自然に定まり，$\pi_0 : \mathbf{R}^m \to \mathbf{T}^m$ はリーマン被覆となる．点 $(1, \ldots, 1)$ の逆像は $\mathbf{Z}^m$ であり，$\mathbf{T}^m$ は $\mathbf{R}^m$ における同値関係 $p \sim q \Longleftrightarrow p - q \in \mathbf{Z}^m$ による商空間 $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$, π_0 は自然な射影と理解できる．

さて，$\mathbf{R}^m$ の一次独立なベクトル $\{v_1, \ldots, v_m\}$ をとり，これらによって生成される格子部分群 $\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k^i v_i \,\middle|\, k^i \in \mathbf{Z}\ (i = 1, \ldots, m) \right\}$ を考える．$\mathbf{T}^m = \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ のときと同様に，商空間 $\mathbf{R}^m/\Gamma$ と自然な射影 $\pi_\Gamma : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m/\Gamma$ が得られる．さらに，$\pi_\Gamma : (\mathbf{R}^m, g_0) \to (\mathbf{R}^m/\Gamma, h_\Gamma)$ がリーマン被覆となるようなリーマン計量 h_Γ が一意的に決まる．ここで，$\mathbf{R}^m$ からそれ自身への線形変換 $x = x^1 v_1 + \cdots + x^m v_m \to (x^1, \ldots, x^m)$ を $\overline{\phi}$ とおけば，$\overline{\phi}$ は Γ を $\mathbf{Z}^m$ に移し，$\mathbf{R}^m/\Gamma$ から $\mathbf{T}^m = \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ への微分同相写像 ϕ を誘導し，

$$\phi(\pi_0(x^1 e_1 + \cdots + x^m e_m)) = (\exp(2\pi\sqrt{-1}\,x^1), \ldots, \exp(2\pi\sqrt{-1}\,x^m))$$

となる．そこで $\mathbf{R}^m$ 上のリーマン計量 g_Γ を

$$g_\Gamma = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} dx^i \otimes dx^j \qquad (a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle_0)$$

と定めれば，その係数 a_{ij} はすべて定数により，g_Γ もすべての移動 τ_a $(a \in \mathbf{R}^m)$ で不変である．したがって，$\pi_0 : (\mathbf{R}^m, g_\Gamma) \to (\mathbf{T}^m, \widetilde{h}_\Gamma)$ がリーマン被覆となるような $\mathbf{T}^m$ 上のリーマン計量 $\widetilde{h}_\Gamma$ が一意的に定まる．このとき $\pi_\Gamma : (\mathbf{R}^m, g_0) \to (\mathbf{R}^m/\Gamma, \phi^* \widetilde{h}_\Gamma)$ はリーマン被覆となり，$h_\Gamma = \phi^* \widetilde{h}_\Gamma$ である．

なお，二つの格子部分群 Γ と Γ' に対して，$(\mathbf{R}^m/\Gamma, h_\Gamma)$ と $(\mathbf{R}^m/\Gamma', h_{\Gamma'})$ が等長であるための条件は，Γ を Γ' に移すユークリッド空間の等長変換 ψ が存在することである．　□

▶ **例 3** $\mathbf{R}^{m+1}$ の原点 O を通る直線全体からなる集合を $\mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ とおき，原点と異なる点 p に対して，O と p を通る直線を対応させる写像を $\pi : \mathbf{R}^m \setminus \{O\} \to \mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ とする．$\mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ には π による商位相を入れると，$\mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ は多様体となり，π は C^∞ 級写像である．π を球面に制限して得られる写像を同じく π と表すと，$\pi : \mathbf{S}^m \to \mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ は 2 対 1 の被覆写像となる．すなわち，$\mathbf{P}^m(\mathbf{R})$ は $\mathbf{S}^m$ の点 p とその対蹠点 $-p$ を同一視して得られる m 次元多様体である．これを**実射影空間**という．対応 $p \to -p$ は $\mathbf{S}^m$ の標準計量 g_1 を保つので，$\pi : (\mathbf{S}^m, g_1) \to (\mathbf{P}^m(\mathbf{R}), \widehat{g}_1)$ がリーマン被覆となる計量 $\widehat{g}_1$ が一意的に定まる． □

▶ **例 4** $\mathbf{R}^4\,(=\mathbf{C}^2)$ の単位球面 $\mathbf{S}^3 = \{(z^1, z^2) \mid |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}$ を考える．a と b を互いに素な整数とし，$U(2)$ の巡回部分群

$$\Gamma_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} \exp 2\pi\sqrt{-1}\left(\dfrac{k}{a}\right) & 0 \\ 0 & \exp 2\pi\sqrt{-1}\left(\dfrac{kb}{a}\right) \end{pmatrix} \,\middle|\, k = 0, 1, \ldots, a-1 \right\}$$

による軌道空間 $\Gamma_{a,b} \backslash \mathbf{S}^3$ を**レンズ空間**とよび，$L(a,b)$ と表す．ここで $\Gamma_{a,b}$ の $\mathbf{S}^3$ への作用は固定点がない，すなわち $\gamma(p) = p\ (\gamma \in \Gamma_{a,b}, p \in \mathbf{S}^3)$ ならば，$\gamma = e$ (単位元) でなければならないことがわかるので，$L(a,b)$ は 3 次元多様体となり，自然な射影 $\pi : \mathbf{S}^3 \to L(a,b)$ は被覆写像である．さらに $(\mathbf{S}^3, g_1)$ への $U(2)$ の作用は等長であるから，$\pi : (\mathbf{S}^3, g_1) \to (L(a,b), \widetilde{g}_1)$ がリーマン被覆となるリーマン計量 $\widetilde{g}_1$ が一意的に定まる． □

被覆空間は，多様体の基本群と密接に関連している．ここでは，基本群について簡単に説明しよう (少し詳しい解説がたとえば [6] にある)．

まず，多様体 M の二点 p, q を結ぶ二つの連続曲線 $\omega(t)$ と $\gamma(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が，両端を固定して**連続変形可能**である，あるいは**ホモトープ**であるとは，区間の直積 $[a,b] \times [0,1]$ から M への 連続写像 H で

$$\begin{cases} H(a,s) = p, & H(b,s) = q \qquad (0 \leqq s \leqq 1) \\ H(t,0) = \omega(t), & H(t,1) = \gamma(t) \quad (a \leqq t \leqq b) \end{cases}$$

を満たすものが存在するときをいう．H を ω と γ を結ぶ，両端を固定する**ホモトピー**という．とくに $p = q$ の場合，H をループ ω と γ を結ぶ，点 p を

基点とするホモトピーという．各 $s \in [0,1]$ に対して，$c_s(t) = H(t,s)$ とおくと，c_s $(0 \leqq s \leqq 1)$ は $\omega = c_0$ と $\gamma = c_1$ を結ぶ $\mathcal{C}([a,b], M)$ における連続曲線を定める (2.3.2 項の注意 (3) 参照)．ここで "連続" を "C^∞ 級" に置き換えることによって，C^∞ 級曲線 ω と γ の間の C^∞ 級ホモトピーを定義する．また ω と γ が区分的に C^∞ 級の場合，$[a,b] \times [0,1]$ において連続で，適当な分割 $a = a_0 < \cdots < a_i = b$ と $0 = s_0 < \cdots < s_j = 1$ をとると，各部分区間の直積 $[a_k, a_{k+1}] \times [s_\ell, s_{\ell+1}]$ において C^∞ 級である写像として，区分的に C^∞ 級ホモトピーを定義する．

次の命題は被覆空間を考えるとき基本となる事実である．

命題 2.5 多様体 M と被覆空間 $\pi : \widetilde{M} \to M$ において，ω を点 p を始点とする M の連続曲線とし，$\widetilde{p}$ を $\pi(\widetilde{p}) = p$ となる任意の点とするとき，$\widetilde{M}$ の連続曲線 $\widetilde{\omega}$ で，$\widetilde{p}$ を始点とし $\pi \circ \widetilde{\omega} = \omega$ となるものがただ一つ存在する．これを $\widetilde{p}$ を始点とする ω の**リフト**とよぶ．さらに，ω, γ を点 p を始点とし同一の終点をもつ M の二つの連続曲線とする．$\widetilde{p}$ を始点とする ω, γ のリフトをそれぞれ $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\gamma}$ とするとき，ω と γ が両端を固定してホモトープであるとき，かつそのときに限り $\widetilde{\omega}$ と $\widetilde{\gamma}$ は両端を固定してホモトープである．

この命題は，ホモトピーの定義域である区間の直積を適当に細分して小領域に分け，それぞれが $\widetilde{M}$ にリフトできるようにし，さらに連続的につながるようにホモトピー全体をリフトすることによって示される．詳細は読者に任せる．

以下において，曲線はすべて区間 $[0,1]$ で定義されているとする．二つの連続曲線 ω と γ に対して $\omega(1) = \gamma(0)$ のとき，これらをつないだ一つの連続曲線 $\omega * \gamma$ を，

$$\omega * \gamma(t) = \begin{cases} \omega(2t) & (0 \leqq t \leqq 1/2) \\ \gamma(2t-1) & (1/2 \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

によって定義する．ω と γ がともにループのとき，$\omega * \gamma$ もループである．また $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$ によって，連続曲線 ω^{-1} を定義する．ここで M の点 p を一つ固定し，p を基点とするループ全体のなす集合を $\Omega(M,p)$ とおく．二つのループ ω, γ に対して，点 p を基点とするホモトピーが存在するという関係は，$\Omega(M,p)$ における同値関係 $\sim$ を定める．ループ ω の属する同値類を $[\omega]$

と表し，ω の属する**ホモトピー類**という．ループ ω と γ によって代表される二つのホモトピー類 $\alpha=[\omega]$ と $\beta=[\gamma]$ に対して，$\omega*\gamma$ の属するホモトピー類を $\alpha\beta$ と表す．$\alpha\beta$ は α, β それぞれの代表元のとり方によらずに決まり，この積によって点 p を基点とするループのホモトピー類全体 $\Omega(M,p)/\sim$ は群になる．これを M の点 p に関する**基本群**といい，$\pi_1(M,p)$ によって表す．ここで，定値曲線 $e_p(t)=p\ (0\leqq t\leqq 1)$ の属するホモトピー類が $\pi_1(M,p)$ の単位元を定める．また，ループ ω に対して，ω^{-1} の属するホモトピー類 $[\omega^{-1}]$ が $[\omega]$ の逆元である．

次に，M の別の点 q に対して，$p=c(0), q=c(1)$ となる連続曲線 c を一つとり，$\Omega(M,p)$ の元 ω に対して，$\Omega(M,q)$ の元 $c^{-1}*\omega*c$ を対応させる．これは $\pi_1(M,p)$ から $\pi_1(M,q)$ への群同形を導く．したがって，連結な多様体 M を考えるときには，$\pi_1(M,p)$ は群として基点 p のとり方にはよらず決まる．さらに，連結な多様体 M の基本群が単位元のみからなる自明な群のとき，M は**単連結**であるという．これは，任意の二点とそれらを結ぶ二つの連続曲線はすべて両端を固定して連続変形可能である，といい換えてもよい．基本的な事実として，任意の連結多様体 M に対して，単連結な多様体 $\widetilde{M}$ と被覆写像 $\pi:\widetilde{M}\to M$ が存在することが知られている．これを M の**普遍被覆空間**という．例 2，例 3，例 4 はすべて普遍被覆空間の例である．

普遍被覆空間 $\pi:\widetilde{M}\to M$ において，$\pi_1(M,p)$ の $\widetilde{M}$ への右作用 ρ を次のように定義する．まず $\pi(\widetilde{p})=p$ となる $\widetilde{M}$ の点 $\widetilde{p}$ を一つ固定する．各ホモトピー類 $\alpha\in\pi(M,p)$ に対して，それを代表するループ ω を一つ選び，$\widetilde{p}$ を始点とするリフトを $\widetilde{\omega}$ とする．次に $\widetilde{M}$ の任意の点 $\widetilde{x}$ に対して，$\widetilde{c}$ を $\widetilde{p}$ を始点とし $\widetilde{x}$ を終点とする連続曲線とし，$c=\pi(\widetilde{c})$ とおく．点 $\widetilde{\omega}(1)$ を始点とする c のリフトの終点を $\rho(\widetilde{x},\alpha)$ と定義する．これは ω と $\widetilde{c}$ の選び方によらずに決まり，$\rho:\widetilde{M}\times\pi_1(M,p)\to\widetilde{M}$ は右連続作用となる．ただし基本群は離散群と考えている．この軌道空間が M であり，商写像が被覆写像 $\pi:\widetilde{M}\to M$ である．基本群の作用は固定点をもたない自由な作用であり，とくに $\pi^{-1}(p)$ と $\pi_1(M,p)$ は 1 対 1 に対応する．したがって，普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ がコンパクトならば，M の基本群は有限群である．

注意 二つの位相空間 X と Y に対して，X から Y への連続写像全体のなす集合を $\mathcal{C}(X,Y)$ と記す．さらにコンパクト–開位相によって，$\mathcal{C}(X,Y)$ を位相空間と

考える．(X と Y が σ–コンパクト距離空間のときには，2.3.1 項の注意 (3) において説明した．) X から Y への二つの連続写像 f_0 と f_1 に対して，$X \times [0,1]$ から Y への連続写像 H があって，

$$f_0(x) = H(x,0), \qquad f_1(x) = H(x,1) \qquad (\forall x \in X)$$

が成り立つとき，H を f_0 と f_1 を結ぶホモトピーといい，f_0 を f_1 に結ぶホモトピー H が存在するとき，f_0 と f_1 はホモトープであるという．各 $t \in [0,1]$ に対して $f_t(x) = H(x,t)$ $(x \in X)$ とおくと，ホモトピー H は，$t \to f_t \in \mathcal{C}(X,Y)$ によって f_0 と f_1 を結ぶ $\mathcal{C}(X,Y)$ での連続曲線を定める．X と Y が局所コンパクト (たとえば多様体) ならば，$\mathcal{C}(X,Y)$ での f_0 と f_1 を結ぶ連続曲線とホモトピーは同一視できることが確かめられる．X として区間 $[a,b]$ を考えると，$\mathcal{C}([a,b],Y)$ でのホモトピーを**自由ホモトピー**といって，両端を固定するホモトピー，一点を基点とするループの集合の中でのホモトピーと区別する．また $\mathcal{C}([a,b],Y)$ の元 c で，$c(a) = c(b)$ となるもの全体，つまり円周 $\mathbf{S}^1$ から Y への連続写像全体を考えるとき，$\mathcal{C}(\mathbf{S}^1,Y)$ におけるホモトピーを連続閉曲線を結ぶ自由ホモトピーといういい方をする．

2.6 リー群と不変距離

本節では，リー群の初歩的な事柄のいくつかについて学ぶ．

2.6.1 リー群上の不変計量

リー群 G を考える．G 上のベクトル場 X が，G の任意の元 a による左移動 L_a に対して不変であるとき，つまり

$$dL_a(X_b) = X_{ab} \qquad (b \in G)$$

を満たすとき，X は**左不変ベクトル場**という．左不変ベクトル場全体を $\mathcal{X}_L(G)$ と記す．これは，ベクトル場全体のなすベクトル空間 $\mathcal{X}(G)$ の部分空間であるが，さらにリー括弧積についても閉じている．すなわち，$X, Y \in \mathcal{X}_L(G)$ に対して，

$$dL_a([X,Y]) = [dL_a(X), dL_a(Y)] = [X,Y]$$

であるから，X と Y のリー括弧積 $[X,Y]$ も左不変となり，$\mathcal{X}_L(G)$ はリー環 ($\mathcal{X}(G)$ の部分リー環) である．G の単位元を e で表すとき，左不変ベクトル場

X に対して，$X_a = dL_a(X_e)$ より，X は e での値 $X_e \in T_eG$ で決まる．

一方，任意の $\xi \in T_eG$ に対して，${X^\xi}_a = (dL_a)_e(\xi)$ $(a \in G)$ によって G 上のベクトル場 X^ξ を定義すると，X^ξ は ${X^\xi}_e = \xi$ を満たす $\mathcal{X}_L(G)$ の元である．このように，対応 $\mathcal{X}_L(G) \to T_eG : X \to X_e$ と $T_eG \to \mathcal{X}_L(G) : \xi \to X^\xi$ によって，$\mathcal{X}_L(G)$ と T_eG は線形同形である．そして

$$[\xi, \eta] = [X^\xi, X^\eta]_e \qquad (\xi,\ \eta \in T_eG)$$

によって T_eG における積を定義すると，これによって T_eG はリー環になる．これをリー群 G の**リー環**とよび，$\mathcal{L}(G)$ で表すことにする．その定義から

$$[X^\xi, X^\eta] = X^{[\xi,\eta]} \qquad (\xi,\ \eta \in T_eG).$$

さて，$\mathbf{R}$ から G への C^∞ 級写像 γ が

$$\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t) \qquad (s,\ t \in \mathbf{R}) \tag{2.10}$$

を満たすとき，γ を G の **1 径数部分群**という．$\mathcal{L}(G)$ の元 ξ に対応する左不変ベクトル場 X^ξ に対して，γ_ξ を $\gamma_\xi(0) = e$ を満たす X^ξ の積分曲線とする．このとき，γ_ξ が定義される範囲において (2.10) を満たす．なぜならば，s をとめて，パラメータ t をもつ二つの曲線 $\gamma_\xi(s+t)$ と $\gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t)$ を考えると，それぞれ

$$\frac{d}{dt}\gamma_\xi(s+t) = {\gamma_\xi}'(s+t) \ = \ {X^\xi}_{\gamma_\xi(s+t)},$$
$$\frac{d}{dt}\gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t) = dL_{\gamma_\xi(s)}({\gamma_\xi}'(t)) \ = \ {X^\xi}_{\gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t)}$$

を満たし，X^ξ の積分曲線である．$t=0$ のとき，$\gamma_\xi(s) = \gamma_\xi(s)\gamma_\xi(0)$ より，これらの曲線は，定義されている範囲において一致している．さらに (2.10) から，γ_ξ の定義域は $\mathbf{R}$ 全体であることをみるのはやさしい．

このように γ_ξ は，すべての s と t に対して (2.10) を満たし，$\gamma_\xi : \mathbf{R} \to G$ は G の 1 径数部分群となる．さらに $a \in G$ に対して，$L_a(\gamma_\xi(t)) = a\gamma_\xi(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ は，$t = 0$ のとき a をとおる X^ξ の積分曲線である．このように，X^ξ は完備なベクトル場である．

リー環 $\mathcal{L}(G)$ からリー群 G への写像を

$$\mathrm{Exp}\ \xi = \gamma_\xi(1) \qquad (\xi \in \mathcal{L}(G))$$

によって定義する．これをリー群 G の**指数写像**という．ここで $\mathrm{Exp}(s\xi) = \gamma_\xi(s)$ $(s \in \mathbf{R})$ が成り立つことに注意する．なぜならば，$t \to \gamma_\xi(st)$ は $t=0$ のとき e をとおり，

$$\frac{d}{dt}\gamma_\xi(st) = s\,X^\xi{}_{\gamma_\xi(st)} = X^{s\xi}{}_{\gamma_\xi(st)}$$

より $X^{s\xi}$ の積分曲線であるからである．したがって $\gamma_\xi(st) = \gamma_{s\xi}(t)$，とくに $t=1$ として $\gamma_\xi(s) = \mathrm{Exp}\,(s\xi)$ となる．このように，指数写像 $\mathrm{Exp}: \mathcal{L}(G) \to G$ は $\mathcal{L}(G)$ 上の直線 $s\xi$ $(s \in \mathbf{R})$ を，単位元 e において ξ に接する G の 1 径数部分群に移す．さらに，$\mathcal{L}(G)$ の原点 (ゼロベクトル) O における接空間 $T_{\mathrm{O}}\mathcal{L}(G)$ と $\mathcal{L}(G)$ を同一視して Exp の微分を計算すると，

$$d\mathrm{Exp}_{\mathrm{O}}(\xi) = \left(\frac{d}{dt}\right)\mathrm{Exp}(t\xi)(t=0) = {\gamma_\xi}'(0) = \xi$$

となり，$d\mathrm{Exp}_{\mathrm{O}}$ は $\mathcal{L}(G)$ の恒等写像である．したがって，Exp は $\mathcal{L}(G)$ の原点 O の近傍から G の単位元 e の近傍への微分同相写像となっている．

さて，G の 1 径数部分群 $\gamma: \mathbf{R} \to G$ に対して，$\gamma(0) = e$ での接ベクトル $\gamma'(0)$ を ξ とおくとき，$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ より

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{ds}L_{\gamma(t)}(\gamma(s))(s=0) = dL_{\gamma(t)}(\xi) = X^\xi{}_{\gamma(t)}$$

となる．このように，$\gamma(t)$ は X^ξ の積分曲線となり，$\gamma(t) = \gamma_\xi(t)$ である．いい換えると，G の 1 径数部分群はすべて $\mathrm{Exp}(t\xi)$ $(\xi \in \mathcal{L}(G))$ と表される．

リー群 G のベクトル場 Y は，任意の右移動 R_a $(a \in G)$ で不変であるとき，**右不変ベクトル場**であるという．右不変ベクトル場全体 $\mathcal{X}_R(G)$ は，$\mathcal{X}(G)$ の部分リー環である．左不変ベクトル場の場合と同様に，各 $\eta \in T_eG$ に対して，$Y^\eta{}_e = \eta$ となる右不変ベクトル場 Y^η が一意的に決まり，写像 $\eta \to Y^\eta$ は T_eG から $\mathcal{X}_R(G)$ への線形同形写像を与える．このとき，$R_a(\mathrm{Exp}(t\eta)) = (\mathrm{Exp}(t\eta))a$ が点 a をとおる Y^η の積分曲線である．さらに，滑らかな写像 (単位元を中心とした反転) $\ell: G \to G$ を，$\ell(x) = x^{-1}$ によって定義する．このとき $\xi \in T_eG$ に対して，左不変ベクトル場 X^ξ と右不変ベクトル場 Y^ξ には次のような関係がある:

$$d\ell_x(X^\xi{}_x) = -Y^\xi{}_{\ell(x)} \qquad (x \in G,\ \xi \in T_eG). \tag{2.11}$$

これを確かめてみると，

$$
\begin{aligned}
d\ell_x({X^\xi}_x) &= \left(\frac{d}{dt}\right)\ell(x\mathrm{Exp}(t\xi))(t=0) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)\mathrm{Exp}(-t\xi)x^{-1}(t=0) \\
&= {Y^{-\xi}}_{\ell(x)} = -{Y^\xi}_{\ell(x)}
\end{aligned}
$$

となる．

さて，リー群 G からリー群 H への C^∞ 級写像 $f : G \to H$ が**準同形**であるとは，(群構造に関して) 準同形である，つまり

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad (a, b \in G)$$

を満たすことである．このとき，f は単位元を単位元に移す．したがって，G の単位元 e における f の微分 df_e は $\mathcal{L}(G)$ から $\mathcal{L}(H)$ への線形写像であるが，さらにリー環の間の準同形写像であることが次のようにして確かめられる．$\mathcal{L}(G)$ の元 ξ に対して，$f(\mathrm{Exp}_G(t\xi))$ は $t=0$ で $df_e(\xi)$ に接する H の 1 径数部分群であるから，$\mathrm{Exp}_H(tdf_e(\xi))$ に一致する．各 $a \in G$ に対して，$a\mathrm{Exp}_G(t\xi)$ は $t=0$ で a をとおる X^ξ の積分曲線であり，それを f で移した曲線 $f(a\mathrm{Exp}_G(t\xi))$ は，

$$f(a)f(\mathrm{Exp}_G(t\xi)) = f(a)\mathrm{Exp}_H(tdf_e(\xi)),$$

すなわち，$t=0$ において $f(a)$ をとおる $X^{df_e(\xi)}$ の積分曲線である．よって $df(X^\xi) = X^{df_e(\xi)}$ となる．ここで $df([X^\xi, X^\eta]) = [df(X^\xi), df(X^\eta)]$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
df_e([\xi,\eta]) &= df_e([X^\xi, X^\eta]) = [df(X^\xi), df(X^\eta)]_e \\
&= [X^{df_e(\xi)}, X^{df_e(\eta)}]_e = [df_e(\xi), df_e(\eta)].
\end{aligned}
$$

以上まとめて，リー群 G からリー群 H への C^∞ 級準同形 f は次の性質 (i)–(iii) を満たす:

(i) $f(\mathrm{Exp}_G(t\xi)) = \mathrm{Exp}_H(tdf_e(\xi))$,

(ii) $df(X^\xi) = X^{df_e(\xi)}$,

(iii) $df_e([\xi,\eta]) = [df_e(\xi), df_e(\eta)]$.

これらの事実を，各 $a \in G$ に対して，$I_a(b) = L_a \circ R_{a^{-1}}(b) = aba^{-1}$ $(b \in G)$

によって定義される G の内部自己同形 I_a に適用してみる．各 $a \in G$ に対して，

$$\mathrm{Ad}_a(\xi) = (dI_a)_e(\xi) = dL_a \circ dR_{a^{-1}}(\xi) \qquad (\xi \in \mathcal{L}(G))$$

とおく．写像 $a \to \mathrm{Ad}_a$ はリー群 G からリー環 $\mathcal{L}(G)$ の線形同形写像全体のなすリー群 $GL(\mathcal{L}(G))$ への C^∞ 級準同形写像である．さらにリー括弧積に関して，Ad_a は

$$\mathrm{Ad}_a([\xi, \eta]) = [\mathrm{Ad}_a(\xi), \mathrm{Ad}_a(\eta)]$$

を満たす．写像 $\mathrm{Ad} : G \to GL\big(\mathcal{L}(G)\big)$ をリー群 G の**随伴表現**という．

ここで一般に，m 次元実ベクトル空間 V に対して，$\mathrm{Hom}(V, V)$ によって V からそれ自身への線形変換全体のなすベクトル空間，$GL(V)$ によって V の線形同形全体のなす $\mathrm{Hom}(V, V)$ の開部分多様体とすれば，$GL(m, \mathbf{R})$ の場合と同様に，$GL(V)$ は合成による乗法によって m^2 次元リー群となり，$\mathrm{Hom}(V, V)$ がそのリー環となる．(V の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を一つ選んで，$v = \sum_{i=1}^{m} x^i e_i \Longleftrightarrow (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbf{R}^m$ と対応させればよい．)

次項において確かめるように，$GL(m, \mathbf{R})$ のリー環 $M(m, \mathbf{R})$ のリー括弧積は

$$[A, B] = AB - BA \qquad (A, B \in M(m, \mathbf{R}))$$

で与えられ，したがって $GL(V)$ のリー環 $\mathrm{Hom}(V, V)$ のリー括弧積は

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi \qquad (\xi, \eta \in \mathrm{Hom}(V, V))$$

で与えられる．

次に，リー群 G 上のリーマン計量 g を考える．g が**左不変計量**であるとは，すべての左移動 L_a $(a \in G)$ が g の等長変換，つまり $L_a^* g = g$ を満たすことをいう．このとき，任意の $a \in G$, $u = X^\xi{}_a$, $v = X^\eta{}_a$ に対して，

$$g_a(u, v) = g_a(X^\xi{}_a, X^\eta{}_a) = g_a(dL_a(\xi), dL_a(\eta)) = g_e(\xi, \eta)$$

より，左不変計量 g は単位元 e での内積 $g_e = \langle\ ,\ \rangle$ によって決まる．いい換えると，$\mathcal{L}(G)$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき，$g_a(u, v) = \langle \xi, \eta \rangle$ によって G 上の左不変計量が定義され，左不変ベクトル場と同様にして，左不変1次微分形式が定義できる．これを使って左不変計量を表現する．$\mathcal{X}_L(M)$ の

基底 $\{E_1, \ldots, E_m\}$ に対して $\{\omega^1, \ldots, \omega^m\}$ を $\omega^i(E_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) を満たす左不変1次微分形式全体のなす m 次元ベクトル空間の基底とする．このとき，左不変計量 g に対して $a_{ij} = g(E_i, E_j)$ とおいて，$g = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$ となる．

リー群 G 上の**右不変計量**も同様に定義される．また左不変であり，かつ右不変でもあるリーマン計量 g を，G 上の**両側不変計量**という．これは，すべての内部自己同形が等長変換であるリーマン計量となる．したがって，すべての Ad_a $(a \in G)$ は内積 $g_e = \langle\ ,\ \rangle$ に関して線形等長変換である．逆にすべての Ad_a に関して不変である内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が定義する左不変計量 (あるいは右不変計量) は，両側不変計量である．

命題 2.6 リー群 G の左不変計量 g が両側不変であると仮定する．このとき次の (1), (2) が成り立つ．

(1) G の元 a に対して，$s_a(x) = ax^{-1}a$ $(x \in G)$ によって定義される写像 $s_a : G \to G$ は，${s_a}^2 = i_G$ を満たす両側不変計量 g の等長変換である．さらに点 a での微分は $ds_a(v) = -v$ $(v \in T_aG)$ となる．

(2) 1径数部分群 $\mathrm{Exp}\, t\xi$ $(\xi \in \mathcal{L}(G))$ は単位元 e をとおり，ξ に接する g の測地線である．(したがって，G の各点 a において，$\xi \in \mathcal{L}(G)$ を動かすと $a\mathrm{Exp}(t\xi)$ が a を通る測地線すべてを表す．)

証明 (1) については，$s_a = L_a \circ s_e \circ {L_a}^{-1}$ と表すことにより，$\ell = s_e$ に対して示せばよい．まず (2.11) により，$d\ell_e(v) = -v$ $(v \in T_eG)$．さらに任意の $x \in G$ とすべての $\xi, \eta \in \mathcal{L}(G)$ に対して，(2.11) により，

$$\ell^* g_x({X^\xi}_x, {X^\eta}_x) = g_{\ell(x)}(-{Y^\xi}_{\ell(x)}, -{Y^\eta}_{\ell(x)}) = g_e(\xi, \eta) = g_x({X^\xi}_x, {X^\eta}_x)$$

となる．このように，ℓ は両側不変計量 g の等長変換である．

次に g の測地線について考える．$\xi \in T_eG$ に対して，$c : (-\alpha, \beta) \to G$ を $c(0) = e$, $c'(0) = \xi$ を満たす測地線とする．$\gamma(t) = \ell(c(t)) = c(t)^{-1}$ とおく．(1) より，γ は $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = -\xi$ を満たす測地線となり，$c(-t)$ と一致する．すなわち $c(t)^{-1} = c(-t)$ である．さらに $-\alpha < 2\tau < \beta$ となる τ を任意にとり，$a = c(\tau)$, $\sigma(t) = s_a(c(t))$ とおく．(1) より，σ は $\sigma(\tau) = a$, $\sigma'(\tau) = -c'(\tau)$ を満たす測地線である．よって $\sigma(t) = c(2\tau - t)$ となる．これから

$$c(\tau)c(-t)c(\tau) = c(2\tau - t) \tag{2.12}$$

が定義されている範囲で成り立つことがわかる．ここで $t \to -\alpha$ とすれば，$2\tau - t \to 2\tau + \alpha$ となり，$t \to \beta$ とすれば，$2\tau - t \to 2\tau - \beta$ となることから，測地線 c の定義域は (拡げるだけ拡げて) $\mathbf{R}$ 全体となり，すべての $t, \tau \in \mathbf{R}$ に対して (2.12) が成り立つ．とくに $t = 0$ として $c(\tau)^2 = c(2\tau)$，$t = -\tau$ として $c(\tau)^3 = c(3\tau)$，一般に，整数 n に対して $c(\tau)^n = c(n\tau)$ が成り立つ．したがって，t_1/t_2 が有理数となるすべてのパラメータ t_1, t_2 に対して，$t_1 = n_1\tau$，$t_2 = n_2\tau$ と表すと，

$$c(t_1 + t_2) = c((n_1 + n_2)\tau) = c(\tau)^{n_1+n_2} = c(\tau)^{n_1}c(\tau)^{n_2} = c(t_1)c(t_2)$$

となる．さらに c の連続性から，すべてのパラメータ t_1，t_2 に対して，$c(t_1 + t_2) = c(t_1)c(t_2)$ となることがわかる．これは測地線 c が 1 径数部分群 $\mathrm{Exp}(t\xi)$ と一致することを示している． ∎

練習問題 2.3 傾きが正である 1 次関数全体のなす集合

$$G = \{yt + x\,(t \in \mathbf{R}) \mid -\infty < x < +\infty,\ y > 0\}$$

を考える．G は関数の合成によって群になり，さらに G と上半平面 $\mathbf{R}^2_+ = \{(x, y) \mid y > 0\}$ を同一視すると G はリー群になる．ここで，点 $(0, 1)$ が単位元 e である．

(1) e での接平面でユークリッド計量 $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ と一致する G の左不変計量は，ポアンカレ計量 $g_P = y^{-2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ によって与えられることを示せ．

(2) $\mathbf{R}^2_+$ を $\{z = x + \sqrt{-1}y \mid y > 0\}$ と考えることによって，$SL(2, \mathbf{R})$ の G への作用を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = (az + b)/(cz + d)$ (一次分数変換) によって定義する．この作用はリーマン計量 g_P に関する等長作用であることを示し，この作用による単位元での固定群を求めよ．

2.6.2 古典群

m 次元ベクトル空間 V は，その加法によって可換リー群になる．単位元はゼロベクトル 0 である．また，V 上の左不変ベクトル場は，$T_0V = V$ のベクトルを移動 $\tau_u : v \to u + v$ によって移したものにほかならない．さらに，リー環 V のリー括弧積は自明である．すなわち，$[u, v] = 0$ $(u, v \in V)$ である．

以下において，一般線形群 $GL(m, \mathbf{R})$ を考える．このリー環は m 次正方行列全体のなすベクトル空間 $M(m, \mathbf{R})$ で，リー括弧積は

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi \qquad (\xi,\ \eta \in M(m, \mathbf{R}))$$

で与えられる．実際，$GL(m, \mathbf{R})$ は $M(m, \mathbf{R})$ の開集合 (開部分多様体) で，点 A での接空間 $T_A GL(m, \mathbf{R})$ は $M(m, \mathbf{R})$ と同一視する．このとき，$A \in$

$GL(m,\mathbf{R})$, $\xi \in M(m,\mathbf{R})$ に対して，$(dL_A)_{E_m}(\xi) = L_A(\xi) = A\xi$ となり，直線 $t \to A + tA\xi$ が $t = 0$ のとき，$X^\xi{}_A$ に接する．これから A の近傍において定義されている C^∞ 級関数 f に対して，

$$X^\xi_A(X^\eta(f)) = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}f(A + tA\xi + sA\eta + stA\xi\eta)(s=0, t=0)$$
$$= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij}\partial x_{k\ell}}(A)(A\xi)_{ij}(A\eta)_{k\ell} + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(A)(A\xi\eta)_{ij}$$

となり，したがって

$$X^\xi{}_A(X^\eta(f)) - X^\eta{}_A(X^\xi(f)) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(A)(A(\xi\eta - \eta\xi))_{ij},$$

すなわち，

$$X^{[\xi,\eta]} = [X^\xi, X^\eta] = X^{\xi\eta - \eta\xi}.$$

次に，指数写像 $\mathrm{Exp} : M(m,\mathbf{R}) \to GL(m,\mathbf{R})$ を考える．まず $A \in M(m,\mathbf{R})$ に対して，

$$\gamma_A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}A^i \qquad (t \in \mathbf{R}) \tag{2.13}$$

とおく．A の成分 $a_{k\ell}$ すべての絶対値が μ で押さえられているとすると，A^i の成分 $a^{(i)}_{k\ell}$ の絶対値は $(m\mu)^i$ 以下で，$e^{tm\mu} = \sum_{i=0}^{\infty}(tm\mu)^i/i!$ より，(2.13) の右辺の各成分は絶対収束することがわかる．このように，$\gamma_A(t)$ は $M(m,\mathbf{R})$ の C^∞ 級曲線を定義する．明らかに $\gamma_A(0) = E_m$，そして (2.13) を微分して，

$$\gamma'_A(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}A^i = \gamma_A(t)A \quad (= A\gamma_A(t))$$

となる．これから，$\gamma_A(t)$ は E_m をとおる左不変ベクトル場 X^A の積分曲線であることがわかり，したがって，$t = 0$ において A に接する 1 径数部分群である (練習問題 2.4 参照)．このようにして，指数写像 $\mathrm{Exp} : M(m,\mathbf{R}) \to GL(m,\mathbf{R})$ は

$$\mathrm{Exp}\,A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i$$

によって与えられることが示された．

練習問題 2.4 (1) $\det(\mathrm{Exp}\,A) = e^{\mathrm{trace}\,A}$

(2) もし $AB = BA$ ならば，$\mathrm{Exp}\,(A+B) = \mathrm{Exp}\,A\,\mathrm{Exp}\,B = \mathrm{Exp}\,B\,\mathrm{Exp}\,A$.

(ヒント： (1) $\frac{d}{dt}\det(\mathrm{Exp}\,tA) = \det(\mathrm{Exp}\,tA)\mathrm{trace}\,A$ を導き (1 章の例 5 参照)，こ

れを積分すればよい. (2) $AB = BA$ ならば, $A \operatorname{Exp} B = (\operatorname{Exp} B)A$ を示し, これから $C(t) = \operatorname{Exp}(-t(A+B)) \operatorname{Exp} tA \operatorname{Exp} tB$ とおいて, $C'(t) = 0$ を示す.)

上の問題の (1) は, リー群 $GL(m, \mathbf{R})$ からリー群 $GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ への準同形 det の微分が, リー環 $M(m, \mathbf{R})$ からリー環 $M(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ への準同形 trace であることを表している.

さて, 一般線形群 $GL(m, \mathbf{R})$ のリー環を, $M(m, \mathbf{R})$ の代わりに $\mathfrak{gl}(m, \mathbf{R})$ と記す. 特殊線形群 $SL(m, \mathbf{R})$, 直交群 $O(m)$, 特殊直交群 $SO(m)$ は一般線形群の閉リー部分群であるが, それぞれのリー環 $\mathfrak{sl}(m, \mathbf{R})$, $\mathfrak{o}(m)$, $\mathfrak{so}(m)$ は, 次のとおりである:

$$\mathfrak{sl}(m, \mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbf{R}) \mid \operatorname{trace} A = 0\},$$
$$\mathfrak{o}(m) = \mathfrak{so}(m) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbf{R}) \mid A + {}^tA = 0\}.$$

実係数の行列群を考えてきたが, 複素係数でも同様である. 複素一般線形群 $GL(m, \mathbf{C})$, 複素特殊線形群 $SL(m, \mathbf{C})$, ユニタリー群 $U(m)$, 特殊ユニタリー群 $SU(m)$ のリー環は, それぞれ次のとおりである:

$$\mathfrak{gl}(m, \mathbf{C}) = M(m, \mathbf{C}),$$
$$\mathfrak{sl}(m, \mathbf{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbf{C}) \mid \operatorname{trace} A = 0\},$$
$$\mathfrak{u}(m) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbf{C}) \mid A + {}^t\overline{A} = 0\},$$
$$\mathfrak{su}(m) = \{\mathfrak{gl}(m, \mathbf{C}) \mid \operatorname{trace} A = 0, A + {}^t\overline{A} = 0\}.$$

▶ **例 5**　リー環 $\mathfrak{u}(1) = \{\sqrt{-1}t \mid t \in \mathbf{R}\}$ からリー群 $U(1)$ への指数写像は指数関数 $\exp\sqrt{-1}t = \cos t + \sqrt{-1}\sin t$ にほかならない. □

▶ **例 6**　$\mathfrak{so}(3)$ において,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, $\{L_1, L_2, L_3\}$ は $\mathfrak{o}(3)$ の基底となり, リー括弧積に関して,

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2$$

を満たす．また指数写像は次のとおりである:

$$\mathrm{Exp}\,tL_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos t&-\sin t\\0&\sin t&\cos t\end{pmatrix},\quad \mathrm{Exp}\ tL_2=\begin{pmatrix}\cos t&0&\sin t\\0&1&0\\-\sin t&0&\cos t\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Exp}\ tL_3=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0\\\sin t&\cos t&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

□

▶ **例 7** $\mathfrak{su}(2)$ において，

$$J_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix},\qquad J_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix},$$

$$J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

とおくと，$\{J_1,J_2,J_3\}$ は $\mathfrak{su}(2)$ の基底となり，リー括弧積に関して，

$$[J_1,J_2]=J_3,\quad [J_2,J_3]=J_1,\quad [J_3,J_1]=J_2$$

を満たす．また指数写像は次のとおりである:

$$\mathrm{Exp}\ tJ_1=\begin{pmatrix}\exp\frac{\sqrt{-1}t}{2}&0\\0&\exp-\frac{\sqrt{-1}t}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Exp}\ tJ_2=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2}&\sqrt{-1}\sin\frac{t}{2}\\\sqrt{-1}\sin\frac{t}{2}&\cos\frac{t}{2}\end{pmatrix},\quad \mathrm{Exp}\ tJ_3=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2}&-\sin\frac{t}{2}\\\sin\frac{t}{2}&\cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}.$$

□

最後に $O(m)$ を考える．$M(m,\mathbf{R})$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{trace}\,A\,{}^tB$$

によって定義する．$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ に対して，$\langle A,B\rangle=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}b_{ij}$ となり，$\langle\ ,\ \rangle$ は $M(m,\mathbf{R})=\mathbf{R}^{m^2}$ におけるユークリッド内積である．$C\in O(m)$ に対して，$C\,{}^tC=E_m$ より，$\langle C,C\rangle=\mathrm{trace}\,CC^{-1}=m$ となる．このように $O(m)$ は，ユークリッド空間の半径 $\sqrt{m}$ の球面に埋め込まれている．さらに

$O(m)$ にその誘導計量 g を考えると，これは $O(m)$ 上の両側不変計量である．なぜならば，$A,B\in M(m,\mathbf{R})$ と $C\in O(m)$ に対して，

$$\langle dL_C(A), dL_C(B)\rangle = \langle CA, CB\rangle = \mathrm{trace}\, CA\,{}^tBC^{-1} = \langle A, B\rangle$$

となり，同様に $\langle dR_C(A), dR_C(B)\rangle = \langle A, B\rangle$ が成り立つからである．

以上のことは，$O(m)$ のリー閉部分群に対しても成り立つ．一般に，コンパクトリー群は，(適当な m を選ぶと) $O(m)$ のリー閉部分群として埋め込まれることが知られている．

練習問題 2.5 $SO(m)$ は連結であることを示せ (したがって $SO(m)$ は $O(m)$ の単位元を含む連結成分である)．(ヒント： $SO(m+1)/SO(m)$ と $\mathbf{S}^m$ は同相であることに注意して，m に関して帰納法を使う．)

練習問題 2.6 $SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を，$\langle A,B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{trace}\, A\,{}^t\overline{B})$ によって定義する．これは，$SU(2)$ の両側不変計量を定める．$\mathfrak{su}(2)$ の元 $X = 2x^1J_1 + 2x^2J_2 + 2x^3J_3$ に $\mathbf{R}^3$ の元 ${}^t(x^1,x^2,x^3)$ (ここでは列ベクトルとして表している) を対応させる写像を $\iota : \mathfrak{su}(2)\to\mathbf{R}^3$ とおく．$SU(2)$ の随伴表現 $\mathrm{Ad} : SU(2)\to GL(\mathfrak{su}(2))$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つので，$\phi = \iota\circ\mathrm{Ad}\circ\iota^{-1}$ は $\mathbf{R}^3$ のユークリッド内積を保つ．さらに $SU(2)$ の連結性を考慮すると，ϕ は $SU(2)$ から $SO(3)$ への C^∞ 級準同形であることがわかる．この ϕ について以下のことを確かめよ．

(1) ϕ の単位元 e での微分は，J_i を L_i $(i=1,2,3)$ に移し，したがって $\phi(\mathrm{Exp}\, tJ_i) = \mathrm{Exp}\, tL_i$ $(i=1,2,3,\ t\in\mathbf{R})$ となる．

(2) ϕ は全射で，その核 $\mathrm{Ker}\,\phi = \{a\in SU(2)\,|\,\phi(a)=e'\}$ (e' は $SO(3)$ の単位元) は $\{\pm e\}$ となる．特に，ϕ は $SU(2)$ から $SO(3)$ への 2 重被覆写像を与える．

練習問題 2.7 (1) リー群 G から多様体 M への連続作用 $\sigma : G\times M\to M$ が C^∞ 級であるとき，G は M の**リー変換群**であるという．G のリー環 $\mathcal{L}(G)$ の元 ξ は，M の 1 径数変換群 $\phi_t(p) = \mathrm{Exp}(t\xi)\cdot p$ $(=\sigma(\mathrm{Exp}(t\xi),p))$ $(p\in M,\ t\in\mathbf{R})$ を定め，したがって，M 上の完備ベクトル場 X^ξ が ${X^\xi}_p = (d/dt)\mathrm{Exp}(t\xi)\cdot p$ $(t=0)$ によって定まる．G の元 a に対して，$L_a(p) = a\cdot p$ $(p\in M)$ とおくと，$dL_a(X^\xi) = X^{\mathrm{Ad}_a(\xi)}$ $(\xi\in\mathcal{L}(G))$ が成り立つことを示せ．(ヒント：$a\cdot(\mathrm{Exp}(t\xi)\cdot p) = a\mathrm{Exp}(t\xi)a^{-1}\cdot(a\cdot p)$ に注意する．)

なお，G の M への左作用を考えたが，右作用 $\rho : M\times G\to M$ が与えられているときも同様である．$\mathcal{L}(G)$ の元 ξ は，M の 1 径数変換群 $\psi_t(p) = p\cdot\mathrm{Exp}(t\xi)$ $(=\rho(p,\mathrm{Exp}(t\xi)))$ を定め，したがって M 上の完備ベクトル場 Y^ξ が ${Y^\xi}_p = (d/dt)p\cdot\mathrm{Exp}(t\xi)$ $(t=0)$ によって定まる．G の元 a に対して，$R_a(p) = p\cdot a$ とおくと，$dR_a(Y^\xi) = Y^{\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\xi)}$ が成り立つことを示せ．

(2) $SU(2)$ から 3 次元単位球面 S^3 ($\subset \mathbf{C}^2$) への作用

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \cdot (z^1, z^2) = (\alpha z^1 - \overline{\beta} z^2, \beta z^1 + \overline{\alpha} z^2) \qquad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

を考える．この作用によって $2J_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の定める $\mathbf{S}^3$ 上のベクトル場 $I = X^{2J_1}$, $J = X^{2J_2}$, $K = X^{2J_3}$ は，それぞれ $((z^1, z^2) \in \mathbf{C}^2 \Leftrightarrow (x^1, y^1, x^2, y^2) \in \mathbf{R}^4$ によって $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{R}^4$ と考えて)

$$I = (-y^1, x^1, -y^2, x^2), \quad J = (-y^2, -x^2, y^1, x^1), \quad K = (x^2, -y^2, -x^1, y^1)$$

となる．さらに (I, J, K) は単位球面 $\mathbf{S}^3$ 全体で定義された正規直交標構場を与え，$[I, J] = 2K$, $[J, K] = 2I$, $[K, I] = 2J$ を満たす．これらのことを検証せよ．

(3) G–主束 $(M, N, \pi : M \to N)$ を考える．G の M への右作用によって，各 $\xi \in \mathcal{L}(G)$ に対して，M 上のベクトル場 Y^ξ が定まる．これを ξ に対応する全空間 M 上の**基本ベクトル場**という．この基本ベクトル場は垂直分布 $\mathcal{V}$ に接している．ここで，G の右作用で不変な水平分布 $\mathcal{H}$ が与えられているとする．このとき，N 上の二点 q, r を結ぶ C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ に対して，その水平リフトによって $q = c(a)$ 上のファイバー $\pi^{-1}(q)$ から $r = c(b)$ 上のファイバー $\pi^{-1}(r)$ への微分同相写像が定まる．それを $\Pi(c; a, b) : \pi^{-1}(q) \to \pi^{-1}(r)$ と記す (命題 2.3 とその証明参照)．

(i) 各 $\xi \in \mathcal{L}(G)$ に対して，$d\Pi(c; a, b)(Y^\xi) = Y^\xi$ が成り立つことを示せ．

(ii) G に左不変計量 $\langle\ ,\ \rangle$ と N にリーマン計量 h が与えられているとき，M 上に次のようにリーマン計量 g を定義する:

$$g_p(Y^\xi + v, Y^\eta + w) = \langle \xi, \eta \rangle + h(d\pi_p(v), d\pi_p(w))$$
$$(\xi, \eta \in \mathcal{L}(G),\ v, w \in \mathcal{H}_p,\ p \in M)$$

このとき定義より，$\pi : (M, g) \to (N, h)$ はリーマン沈め込みとなり，(i) より $\Pi(c; a, b)$ は $\pi^{-1}(q)$ と $\pi^{-1}(r)$ の誘導計量に関する等長変換である．さらに G の作用が g に関して等長的であるとき，かつそのときに限り $\langle\ ,\ \rangle$ は両側不変計量である．これを示せ．(ヒント：(i) $\overline{c}_p(t)$ を $\pi^{-1}(q)$ の元 p を出発する c の水平リフトとすると，$\overline{c}_p(t) \cdot \mathrm{Exp}(s\xi)$ は $p \cdot \mathrm{Exp}(s\xi)$ を出発する c の水平リフトであることに注意する．(ii) $dR_a(Y^\xi) = Y^{\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\xi)}$ と $d\pi \circ dR_a = d\pi$ に注意する．)

(4) ホップ束 $(\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^2, \mathcal{P} : \mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2)$ の場合を考える．$\mathfrak{u}(1) = \sqrt{-1}\,\mathbf{R}$ の元 $\sqrt{-1}$ に対応する基本ベクトル場 I は $I = (-y^1, x^1, -y^2, x^2)$ となる．これを確かめよ．

3章 線形接続

3.1 共変微分

本節では，多様体 M 上のベクトル場の方向微分を考えることにする．関数の場合と同様に，C^∞ 級曲線 c に対して，

$$\frac{dX_{c(t)}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X_{c(t+\Delta t)} - X_{c(t)}}{\Delta t}$$

として，ベクトル場 X の $c'(t)$ 方向の微分を定義できるであろうか．関数の場合と違って，$X_{c(t)}, X_{c(t+\Delta t)}$ はそれぞれ $T_{c(t)}M, T_{c(t+\Delta t)}M$ の元で，異なったベクトル空間の元であるから，ベクトル場の微小変分 $\Delta X = X_{c(t+\Delta t)} - X_{c(t)}$ はこのままでは意味をもたない．したがって，$T_{c(t+\Delta t)}M$ の元を $T_{c(t)}M$ の元に結びつける規則が必要である．

本節において，まずベクトル場の共変微分，座標変換で不変なベクトル場の方向微分を定義することからはじめる．

3.1.1 ユークリッド空間の部分多様体上の共変微分

多様体 M が $\mathbf{R}^n$ の場合を考えてみる．$(x^1, \ldots, x^n)$ を直交座標系とし，$E_i = \partial/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく．$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 X は $X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i$ $(X^i \in C^\infty(\mathbf{R}^n))$ と一意的に表されるので，C^∞ 級曲線 c に対して

$$\frac{dX_{c(t)}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dX^i(c(t))}{dt} E_i \tag{3.1}$$

と定めるのは自然であろう．すなわち，$\mathbf{R}^n$ の点 p での接ベクトル空間 $T_p\mathbf{R}^n$ を基底 $\{(E_1)_p, \ldots, (E_n)_p\}$ によって $\mathbf{R}^n$ 自身と同一視して，ベクトル場 X を $\mathbf{R}^n$ からそれ自身への関数と考えて $c'(t)$ 方向の微分を定めているわけである．

次に，$\mathbf{R}^n$ に (埋め込まれた) 部分多様体 M の場合を考えてみよう．M の次元を m とする．各接空間 T_pM を $T_p\mathbf{R}^n$，したがって $\mathbf{R}^n$ の部分空間とみなし，M 上のベクトル場 X を $X = \sum_{i=1}^{n} X^i\ E_i\ (X^i \in C^\infty(M))$ と一意的に表す．(3.1) によって方向微分 $dX_{c(t)}/dt$ を定めることができるが，$dX_{c(t)}/dt$ は $T_{c(t)}M$ の元とは限らない，すなわち M に接しているとは限らない．したがって，$dX_{c(t)}/dt$ の $T_{c(t)}M$ 成分をとることが考えられる．たとえば，$\mathbf{R}^n$ のユークリッド計量 g_0 を用いて，T_pM の $\mathbf{R}^n$ における直交補空間を N_pM とすれば，

$$\mathbf{R}^n = T_pM \oplus N_pM$$

と直交分解される．この分解に関する $\mathbf{R}^n$ の元 v の T_pM 成分を v^T と記し，

$$\frac{DX_{c(t)}}{dt} := \left(\frac{dX_{c(t)}}{dt}\right)^T \tag{3.2}$$

と定める．これによって，M の曲線 c に沿うベクトル場 $t \to DX_{c(t)}/dt\ (\in T_{c(t)}M)$ が得られる．さらに各 $v \in T_pM$ に対して，$c(0) = p$, $c'(0) = v$ を満たす曲線 c をとり，X の v 方向の微分を (3.2) $(t = 0)$ によって定め，$\nabla_v X$ と記す (∇ はナブラとよぶ)．$\nabla_v X$ は c のとり方によらずに定まり，$X = \sum_{i=1}^{n} X^i\ E_i\ (X^i \in C^\infty(M))$ と表したとき，$\nabla_v X = \sum_{i=1}^{n} v(X^i){E_i}^T$ となる．写像 $(v, X) \in T_pM \times \mathcal{X}(M) \to \nabla_v X \in T_pM$ は，$\mathbf{R}$ 上の双線形写像であり，さらに

$$\nabla_v(fX) = v(f)X_p + f(p)\nabla_v X \quad (v \in T_pM,\ f \in C^\infty(M),\ X \in \mathcal{X}(M))$$

を満たす．ここで，$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への写像 ∇ を

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y \qquad (p \in M) \tag{3.3}$$

によって定義すると，この写像は次の三つの条件 (C-1)–(C-3) を満たしている:

(C-1) $\mathbf{R}$ 上の双線形写像である，

(C-2) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \quad (f \in C^\infty(M),\ X,\ Y \in \mathcal{X}(M))$,

(C-3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad (f \in C^\infty(M),\ X,\ Y \in \mathcal{X}(M))$.

次節であらためて述べることであるが，(3.2) と (3.3) によって定められた写像 $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ を，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体 M の誘導計量 g に関する**リーマン接続**，あるいは**レビ・チビタ接続**といい，$\nabla_X Y$ を Y の X による**共変微分**という．この共変微分は，$\mathbf{R}^n$ の自然なベクトル場の方向微分と，$\mathbf{R}^n$ から TM へのユークリッド計量に関する直交射影によって定められた，部分多様体 M 上のベクトル場の自然な微分法と考えられる．このレビ・チビタ接続は，さらに次の二つの性質をもっている:

(C-4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \quad (X,\ Y \in \mathcal{X}(M))$,

(C-5) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (X, Y, Z \in \mathcal{X}(M))$.

(この二つの事実は，命題 4.7 においてより一般的な形で明らかにされる．)

3.1.2 一般の線形接続と共変微分

次に，一般の多様体を考えよう．まず天下りに定義を述べることからはじめる．

定義 3.1 多様体 M において，次の三つの条件を満たす $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への写像 $\nabla : (X, Y) \to \nabla_X Y$ を，多様体 M の**線形接続**という．

(C-1) $\mathbf{R}$ 上の双線形写像である．

(C-2) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

(C-3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

ここで $X,\ Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ である．

多様体 M 上に線形接続 ∇ が与えられているとき，$\nabla_X Y$ を ベクトル場 Y のベクトル場 X による**共変微分**とよぶ．

補題 3.1 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して，X あるいは Y がある開集合 U において恒等的に 0 とする．このとき，$\nabla_X Y$ も U において恒等的に 0 である．

証明 U において $Y = 0$ とする．任意の点 $p \in U$ に対して，滑らかな関数 f でその台が U に含まれ，p のある近傍 V において 1 となるものをとる．U において $Y = 0$ より，ベクトル場 fY は M において恒等的に 0 である．したがって，(C-3) より

$$0 = (\nabla_X(fY))_p = X_p(f)Y_p + f(p)(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p.$$

これが U のすべての点 p に対して成り立つので，$\nabla_X Y$ も U において 0 であることが示された．同様に U において，$X=0$ ならば $\nabla_X Y=0$ も示される． ∎

実際，(C-2) より，1.1.3 項における 1 次微分形式の場合と同様の理由から，次のことが成り立つ．

補題 3.2 ベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して，$\nabla_X Y$ の点 p での値 $(\nabla_X Y)_p$ は X の点 p での値 $v = X_p$ のみで決まり，$\nabla_v Y = (\nabla_X Y)_p$ とおくことにより，T_pM からそれ自身への線形写像 $v \in T_pM \to \nabla_v Y \in T_pM$ が定まる．

さて，共変微分 $\nabla_X Y$ の局所座標系による表示を与えるために，補題 3.1 からわかるもう一つの事実を確かめる．M の開集合 U に対して，U 上の線形接続 ∇^U が ∇ から自然に定まる．実際，U 上のベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ に対して ${\nabla^U}_X Y \in \mathcal{X}(U)$ を定めるために，まず U の点 p に対して，先のように関数 f をとり，U においては $\widetilde{X} = fX$，U の外では $\widetilde{X} = 0$ とおくことによって，X を M 全体で定義されているベクトル場 $\widetilde{X}$ に拡張しておく．$\widetilde{Y}$ も同様に定める．そこで $({\nabla^U}_X Y)_p = (\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})_p$ とおくと，これは f のとり方によらずに決まることが補題 3.1 よりわかる．∇^U が (C-1), (C-2), (C-3) を満たし，したがって U 上の接続を与え，その定め方より，M 上のベクトル場 X, Y に対して ${\nabla^U}_{X_{|U}} Y_{|U} = \nabla_X Y$ が U において成り立つ．このようにして，M 上の線形接続を開集合に制限することができる．以下では ∇^U も簡単のため ∇ と表す．

次に，開集合 U 上に局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ が与えられていると仮定する．このとき $E_i = \partial/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおくと，各 $i, j = 1, \ldots, m$ に対して，

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k E_k$$

と一意的に表すことができる．ここで $\{\Gamma_{i,j}^k\}$ は m^3 個の U 上の C^∞ 級関数で，局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に関する線形接続 ∇ の**クリストッフェルの記号**という．クリストッフェルの記号を用いて，ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^{m} X^i E_i$ と $Y = \sum_{i=1}^{m} Y^i E_i$ に対して，Y の X による共変微分 $\nabla_X Y$ を表してみると，(C-1),

(C-2), (C-3) から

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} X^i E_i(Y^k) + \sum_{i,j=1}^{m} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k \tag{3.4}$$

となる.

さて, $(y^1, \ldots, y^m)$ を他の局所座標系とし, これに関するクリストッフェルの記号を $\{\overline{\Gamma}_{ij}^k\}$ とする. ここで, $\overline{E}_i = \partial/\partial y^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおく. 座標変換の規則

$$\overline{E}_i = \sum_{j=1}^{m} a_i^j E_j \quad \left(a_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right), \qquad E_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{a}_i^j \overline{E}_j \quad \left(\overline{a}_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$$

より, (C-1), (C-2), (C-3) を使って計算すると

$$\nabla_{\overline{E}_i} \overline{E}_j = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{k,h=1}^{m} a_i^k E_k(a_j^h) \overline{a}_h^r + \sum_{k,h,\ell=1}^{m} a_i^k a_j^\ell \Gamma_{k\ell}^h \overline{a}_h^r \right) \overline{E}_r$$

となる. したがって,

$$\overline{\Gamma}_{ij}^r = \sum_{k,h=1}^{m} a_i^k E_k(a_j^h) \overline{a}_h^r + \sum_{k,h,\ell=1}^{m} a_i^k a_j^\ell \Gamma_{k\ell}^h \overline{a}_h^r$$

となり, ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_i^k E_k(a_j^h) = \partial^2 x^h / \partial y^i \partial y^j$ に注意してまとめると, 次のクリストッフェルの記号の変換規則を導くことができる:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^r = \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 x^h}{\partial y^i \partial y^j} + \sum_{k,\ell=1}^{m} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial y^j} \Gamma_{k\ell}^h \right) \frac{\partial y^r}{\partial x^h}. \tag{3.5}$$

逆に M において, 座標近傍の族 $\{(U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^m)) \,|\, \alpha \in A\}$ と各 U_α 上の m^3 個の C^∞ 級関数の系 $\{\Gamma_{\alpha,ij}^k \,|\, i,j,k = 1, \ldots, m\}$ が与えられ, $\{U_\alpha\}$ は M を被覆しかつ $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば, $\{\Gamma_{\alpha,ij}^k\}$ と $\{\Gamma_{\beta,ij}^k\}$ が $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で関係式 (3.5) を満たすとき, M 上の線形接続 ∇ が各 U_α において (3.4) によって定義される.

ここで変換規則は, 命題 1.3 (3) ですでに得られたリーマン計量のクリストッフェルの記号の変換規則そのものであることに注意する. いい換えると, M 上のリーマン計量 g が与えられたとき, Γ_{ij}^k を g のクリストッフェルの記号 (1.8) とすれば, 座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ への制限が (3.4) で表される M 上の線形接続 ∇ が定まる. これをリーマン計量 g の**リーマン接続**, あるいは**レビ・チビタ接続**とよぶ. M がユークリッド空間の部分多様体のとき, 3.1.1 項で述べ

たものと同じである．なおこの場合には，さらに次の二つの性質を満たすと述べた:

(C-4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \quad (X,\ Y \in \mathcal{X}(M))$,

(C-5) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (X,Y,Z \in \mathcal{X}(M))$.

一般に，多様体 M 上の線形接続 ∇ に対して，

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

によって定義される写像 $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ を，∇ の**ねじれ率テンソル (場)** という．(C-2), (C-3) と交換子積の性質 (1.1.3 項参照) から，任意の C^∞ 級関数 f に対して

$$T(fX,Y) = T(X,fY) = fT(X,Y)$$

が成り立ち，したがって $T(X,Y)$ の点 p での値 (接ベクトル) $T(X,Y)_p \in T_pM$ は，X, Y, f それぞれの点 p での値のみによって決まる．条件 (C-4) はねじれ率テンソル T が恒等的に 0 である，すなわち $T=0$ であることを意味している．また M 上にリーマン計量 g が与えられたとき，条件 (C-5) が成り立つならば，線形接続 ∇ は g と**整合**しているという．これらの条件 (C-4) と (C-5) の意味は続く二つの節において明確になる．座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ において，クリストッフェルの記号を用いると，条件 (C-4) と (C-5) はそれぞれ次のように述べることができる:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \qquad (i,j,k = 1, \ldots, m),$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_{\ell=1}^{m} (\Gamma^\ell_{ki} g_{\ell j} + \Gamma^\ell_{kj} g_{\ell i}) \qquad (i,j,k = 1, \ldots, m).$$

なお，リーマン計量のレビ・チビタ接続は条件 (C-4) と (C-5) を満たし (命題 1.3 参照)，逆にこのような線形接続はレビ・チビタ接続である．

定理 3.3 多様体 M とその上のリーマン計量 g が与えられたとき，ねじれ率テンソル場 T が恒等的に 0 で，かつ g と整合する線形接続 ∇，つまり二つの条件 (C-4) と (C-5) を満たすものがただ一つ存在する．これがリーマン計量 g のリーマン接続あるいはレビ・チビタ接続であり，次の式で与えられる:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ & + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

証明　線形接続 ∇ が (C-4) と (C-5) を満たすならば，これらの条件を使って (3.6) の右辺を計算するとその左辺が導かれる．一方 (3.6) の右辺を $F(X,Y,Z)$ とおき，X, Y を固定して，$Z \to F(X,Y,Z)$ によって定まる $\mathcal{X}(M)$ から $C^\infty(M)$ への写像を $\omega_{X,Y}(Z)$ とおく．このとき，任意の C^∞ 級関数 f に対して $\omega_{X,Y}(fZ) = f\omega_{X,Y}(Z)$ となり，$\omega_{X,Y}(Z)$ の点 p での値は Z の点 p での値 $v = Z_p \in T_pM$ によってのみ決まる．すなわち $\omega_{X,Y}(v) = \omega_{X,Y}(Z)(p)$ は T_p^*M の元を定め，$\omega_{X,Y}$ は M 上の 1 次微分形式となる．そこでベクトル場 $\nabla_X Y$ を，$\omega_{X,Y}(Z) = g(2\nabla_X Y, Z)$ $(\forall Z \in \mathcal{X}(M))$ によって定める．すなわち，二つのベクトル場 X, Y に対して，(3.6) からベクトル場 $\nabla_X Y$ を定める．このとき，∇ が (C-4) と (C-5) を満たす M 上の線形接続を与えることは直接の計算によって確かめられる．∎

たとえば，ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^m, g_0)$ において，$(x^1, \ldots, x^m)$ をその直交座標系とすると，そのレビ・チビタ接続 ∇^0 は，

$$\nabla^0{}_{\partial/\partial x^i}(\partial/\partial x^j) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

によって定義される．このように，直交座標系に関するクリストッフェルの記号はすべて 0 である．

3.2 平行移動

多様体 M の C^∞ 級曲線 $c : (a,b) \to M$ が与えられているとき，区間 (a,b) から接束 TM への C^∞ 級曲線 $\xi : (a,b) \to TM$ で，$\xi(t) \in T_{c(t)}M$ $(a < t < b)$ を満たすものを，**曲線 c に沿うベクトル場**とよび，それら全体を $\mathcal{X}_c(M)$ と記すことにする．たとえば，c の速度ベクトル $c'(t)$ $(a < t < b)$ 自身 $\mathcal{X}_c(M)$ の元である．M 上のベクトル場 X に対して，$X_c(t) = X_{c(t)}$ とおくことにより，$\mathcal{X}_c(M)$ の元が得られる．また c の C^∞ 級変分 $H(t,s)$ $(a < t < b, -\varepsilon < s < \varepsilon)$ (1.4 節参照) に対して，その変分ベクトル場 $V = dH_{(t,0)}(\partial/\partial s)$ は $\mathcal{X}_c(M)$ の元である．

本節では，多様体 M 上に線形接続 ∇ が与えられているとき，曲線に沿うベクトル場の共変微分が自然に定まることを示し，曲線に沿う平行移動について説明する．

3.2.1 曲線に沿うベクトル場の共変微分

まず C^∞ 級曲線 c に対して，次の性質 (D-1)–(D-3) を満たす $\mathcal{X}_c(M)$ から

それ自身への写像

$$\frac{D}{dt}\colon\ \mathcal{X}_c(M) \to \mathcal{X}_c(M)$$

がただ一つ定まる:

(D-1) $\mathbf{R}$ 上の線形写像である，すなわち

$$\frac{D}{dt}(\alpha\eta+\beta\xi)=\alpha\,\frac{D}{dt}\eta+\beta\,\frac{D}{dt}\xi \qquad (\alpha,\beta\in\mathbf{R},\ \eta,\xi\in\mathcal{X}_c(M)).$$

(D-2) 任意の C^∞ 級関数 $f(t)$ $(a<t<b)$ と c に沿うベクトル場 ξ に対して，

$$\frac{D}{dt}(f\xi)=\frac{df}{dt}\,\xi+f\,\frac{D}{dt}\xi.$$

(D-3) M 上のベクトル場 $X\in\mathcal{X}(M)$ に対して，

$$\frac{D}{dt}X_c=\nabla_{c'}X.$$

実際，これらの性質を満たす写像 D/dt があるとしよう．まず曲線 c が座標近傍 $(U,\phi=(x^1,\ldots,x^m))$ に含まれる場合を考える．このとき，$E_i=\partial/\partial x^i$ $(i=1,\ldots,m)$ を使って，各 $\xi\in\mathcal{X}_c(M)$ は一意的に

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^m \xi^i(t)(E_i)_c \qquad (\xi^i\in C^\infty((a,b)))$$

と表される．ここで $\phi(c(t))=(c^1(t),\ldots,c^m(t))$ とおいて c' を表すと，$c'=\sum_{i=1}^m (dc^i/dt)(E_i)_c$ より，(D-1)–(D-3) を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\xi &= \sum_{i=1}^m\left(\frac{d\xi^i}{dt}(E_i)_c+\xi^i\frac{D}{dt}(E_i)_c\right)\\ &= \sum_{i=1}^m\left(\frac{d\xi^i}{dt}(E_i)_c+\xi^i\nabla_{c'}E_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^m\left(\frac{d\xi^i}{dt}(E_i)_c+\sum_{j=1}^m\xi^i\frac{dc^j}{dt}(\nabla_{E_j}E_i)_c\right)\end{aligned}$$

となる．ここで線形接続 ∇ の局所座標系 $(x^1,\ldots,x^m)$ に関するクリストッフェルの記号 Γ_{ij}^k を用いて，上式を整理すると，

$$\frac{D\xi}{dt}(t)=\sum_{k=1}^m\left(\frac{d\xi^k(t)}{dt}+\sum_{i,j=1}^m\Gamma_{ij}^k(c(t))\frac{dc^i(t)}{dt}\xi^j(t)\right)(E_k)_{c(t)} \tag{3.7}$$

となる．ここで U 上の別の局所座標系を用いても，クリストッフェルの記号の変換則 (3.5) より，(3.7) の右辺は局所座標系のとり方によらずに，したがっ

て，c に沿うベクトル場を定めることが確かめられる．いい換えれば，この右辺によって $D\xi/dt$ を定義することになる．また c が一つの座標近傍に完全に含まれないときも，区間を適当に細分し，各部分区間に c を制限した曲線が一つの座標近傍に含まれるようにする．そして各部分区間において，(3.7) の右辺で $D\xi/dt$ を定めることによって，c に沿うベクトル場が定まる．このように定めた写像 D/dt は，明らかに (D-1)–(D-3) を満たしている．

定義 3.2 C^∞ 級曲線 c に沿うベクトル場 ξ が，c に沿って**平行**であるとは，

$$\frac{D}{dt}\,\xi = 0$$

を満たすときをいう．また c の接ベクトル c' が c に沿って平行であるとき，すなわち

$$\frac{D}{dt}\,c' = 0$$

が成り立つとき，c を線形接続 ∇ の**測地線**という．

いい換えると，c に沿うベクトル場 ξ が c に沿って平行であるとは，c が座標近傍 $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ に含まれている区間で $\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi^i (E_i)_c$ とおいて，成分 $\xi^1(t), \ldots, \xi^m(t)$ $(a < t < b)$ を考えると，これらが次の 1 階連立線形常微分方程式系の解であるときをいう:

$$\frac{d\xi^k(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dc^i(t)}{dt} \xi^j(t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{3.8}$$

また C^∞ 級曲線 c が測地線であるとは，$\phi(c(t)) = (c^1(t), \ldots, c^m(t))$ とおいて，$c^i(t)$ が次の 2 階連立 (非線形) 常微分方程式系を満たすときをいう:

$$\frac{d^2c^k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dc^i(t)}{dt} \frac{dc^j(t)}{dt} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{3.9}$$

▶ **例 1** $\mathbf{R}^m$ とその上の自明な線形接続，ユークリッド計量のレビ・チビタ接続を考える．直交座標系に関して，そのクリストッフェルの記号はすべて 0 であるから，$\mathbf{R}^m$ の曲線に沿うベクトル場 ξ が平行であるとは，$\xi(t) = (\xi^1(t), \ldots, \xi^m(t))$ が t によらない一定の成分をもつベクトル v を $c(t)$ に平行に移して得られるベクトル場であるといえる． □

3.2.2 曲線に沿う平行移動

線形接続 ∇ の与えられた多様体 M の考察を続ける．M の C^∞ 級曲線 $c(t)$ のパラメータ $t=\tau$ を一つ固定する．このとき，各接ベクトル $v \in T_{c(\tau)}M$ に対して，$\xi_v(\tau)=v$ となる c に沿って平行なベクトル場 ξ_v がただ一つ存在する．この事実は，c が一つの座標近傍に含まれているときは，連立常微分方程式系 (3.8) の解の存在と一意性からただちに従う．一般の場合も，曲線の定義区間を適当に細分して，それぞれの部分にこれを適用することによって，初期ベクトルを与えられたときの平行なベクトル場の存在と一意性が確かめられる．これを $\xi_{v,\tau}$ と記すと，$\xi_{v,\tau}$ は初期条件 v,τ に関しても C^∞ 級微分可能で，さらに線形方程式の解であることから，初期ベクトル v に関して線形となる:

$$\xi_{\alpha u+\beta v,\tau}(t)=\alpha\,\xi_{u,\tau}(t)+\beta\,\xi_{v,\tau}(t)$$
$$(\alpha,\ \beta\in\mathbf{R},\ u,\,v\in T_{c(\tau)}M,\ a<t<b).$$

定義 3.3 $\tau,t\in(a,b)$ に対して，$T_{c(\tau)}M$ から $T_{c(t)}M$ への線形写像を

$$\Pi(c;\tau,t)(v)=\xi_{v,\tau}(t)$$

によって定義する．これを $T_{c(\tau)}M$ から $T_{c(t)}M$ への曲線 c に沿う**平行移動**という．

$\Pi(c;\tau,t)$ と $\Pi(c;t,\tau)$ を合成すると，その定義より接空間 $T_{c(\tau)}M$ の恒等写像になるので，曲線に沿う平行移動は線形同形写像である．したがって，(τ を一つ任意にとめて) $T_{c(\tau)}M$ の基底 $\{e_1,\ldots,e_m\}$ に対して，

$$E_i(t)=\Pi(c;\tau,t)(e_i)\qquad(a<t<b)$$

とおけば，$\{E_i(t)\,|\,i=1,\ldots,m\}$ は $T_{c(t)}M$ の基底を与える．よって c に沿うベクトル場 ξ は，

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^m\xi^i(t)E_i(t)\qquad(\xi^i\in C^\infty((a,b)))$$

と一意的に表され，各 E_i は，c に沿う平行なベクトル場，すなわち $DE_i/dt=0$ より

$$\frac{D\xi}{dt}=\sum_{i=1}^m\frac{d\xi^i}{dt}\,E_i \tag{3.10}$$

となる．ここで $\Pi(c;s,t)(E_i(s)) = E_i(t)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\frac{D\xi(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{m} \lim_{s\to t} \frac{\xi^i(s)-\xi^i(t)}{s-t} E_i(t)\\ &= \lim_{s\to t} \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\xi^i(s)\Pi(c;s,t)(E_i(s)) - \xi^i(t)E_i(t)\right)}{s-t}\\ &= \lim_{s\to t} \frac{\Pi(c;s,t)(\xi(s)) - \xi(t)}{s-t}\\ &= \frac{d}{ds}\Pi(c;s,t)(\xi(s))(s=t).\end{aligned}$$

とくに M 上のベクトル場 X に対して，$c'(t)$ 方向の X の共変微分は，

$$\nabla_{c'(t)}X = \frac{DX_c}{dt} = \frac{d}{ds}\Pi(c;s,t)(X_{c(s)})(s=t)$$

で与えられる．

さてここで, 線形接続 ∇ はリーマン計量 g と整合している, つまり条件 (C-5) を満たしているとする．このとき，曲線 c に沿うベクトル場 ξ, η に対して,

$$\frac{d}{dt}g(\xi,\eta) = g\left(\frac{D\xi}{dt},\eta\right) + g\left(\xi,\frac{D\eta}{dt}\right)$$

が成り立つ．したがって $u, v \in T_{c(\tau)}M$ に対して,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}g(\Pi(c;\tau,t)(u),\Pi(c;\tau,t)(v))\\ &\quad = g\left(\frac{D}{dt}\Pi(c;\tau,t)(u),\Pi(c;\tau,t)(v)\right) + g\left(\Pi(c;\tau,t)(u),\frac{D}{dt}\Pi(c;\tau,t)(v)\right)\\ &\quad = 0\end{aligned}$$

より, $g(\Pi(c;\tau,t)(u),\Pi(c;\tau,t)(v))$ はパラメータ t によらず一定で $g(u,v)$ に等しい．このように, $c(\tau)$ から $c(t)$ への c に沿う平行移動 $\Pi(c;\tau,t) : T_{c(\tau)}M \to T_{c(t)}M$ は，内積を保つ線形変換である．したがって曲線 c が測地線ならば，c の速さ $\|c'(t)\| = (g(c'(t),c'(t)))^{1/2}$ は一定である．

逆にすべての曲線に対して，それらに沿う平行移動が線形等長変換であるとき，線形接続 ∇ はリーマン計量 g と整合していることがわかる．実際，3.4 節で説明する用語を使うと，リーマン計量 g は M 上の $(0,2)$ 次テンソル場であり，線形接続との整合条件 (C-5) は，$(0,2)$ 次テンソル場 g が平行である，つまり g の共変微分が 0 である ($\nabla g = 0$) ということと同値である．さらに後者

は，任意の曲線に沿う平行移動によって g が不変であるともいい換えられる．

以後断らない限り，リーマン多様体においてはそのレビ・チビタ接続を考え，その部分多様体においては誘導計量に関するレビ・チビタ接続を考える，こととする．

注意 (1) C^∞ 級曲線に対してそれに沿う平行移動を定義したが，区分的に C^∞ 級曲線に対しても同様に定義される．曲線が C^∞ 級である各部分区間での平行移動を合成すればよい．

(2) (パラメータ変換と平行移動) 線形接続の与えられた多様体 M において，C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ のパラメータ変換 $t = \theta(s)$ によって得られる曲線 $\widetilde{c}(s) = c(\theta(s))$ $(\alpha \leqq s \leqq \beta)$ を考える．ただし $a = \theta(\alpha)$, $b = \theta(\beta)$ とし，$p = c(a) = \widetilde{c}(\alpha)$, $q = c(b) = \widetilde{c}(\beta)$ とおく．このとき，p から q への曲線 c に沿う平行移動 $\Pi(c; a, b) : T_pM \to T_qM$ と曲線 $\widetilde{c}$ に沿う平行移動 $\Pi(\widetilde{c}; \alpha, \beta) : T_pM \to T_qM$ は一致する．これは平行移動を定める方程式 (3.8) から容易に確かめられる．

▶ **例 2** 図 3.1 のように，3 次元ユークリッド空間の中の線分 ab を直線 ℓ に関して回転して得られる円錐面 C を考える．ただし頂点 a は除いている．回転軸と線分のなす角を α とし，ab 上の点 p を 1 回転して得られる円周 $c(t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ に沿う平行移動 $\Pi : T_pC \to T_pC$ を求める．まず 線分 ab に沿って円錐を切り，それを平面に展開する．得られる扇型を $\widetilde{C}$ とし，円周 c に対応する曲線を $\widetilde{c}$ とする．c に沿う平行移動を求めるには，$\widetilde{c}$ に沿う平面での平行移動を考えればよいので，それは角 $2\pi(1-\sin\alpha)$ の回転であることがわかる．つまり T_pC の正規直交基底として，$e_1 = c'(0)$, $e_2 = \overrightarrow{pa}/\|\overrightarrow{pa}\|$ をとれば，平行移動 Π は次で与えられる:

$$\Pi(e_1) = \cos 2\pi(1-\sin\alpha)e_1 + \sin 2\pi(1-\sin\alpha)e_2,$$

$$\Pi(e_2) = -\sin 2\pi(1-\sin\alpha)e_1 + \cos 2\pi(1-\sin\alpha)e_2. \qquad \Box$$

▶ **例 3** 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の単位球面

$$\mathbf{S}^2 = \{(\cos\theta\sin\xi,\ \sin\theta\sin\xi,\ \cos\xi) \mid 0 \leqq \xi \leqq \pi,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

において，$\xi = \beta$ $(0 < \beta < \pi/2)$ で定義される北極 $p_1 = (0, 0, 1)$ を中心とする小円 $c(\theta) = (\cos\theta\sin\beta,\ \sin\theta\sin\beta,\ \cos\beta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ に沿う平行移動を

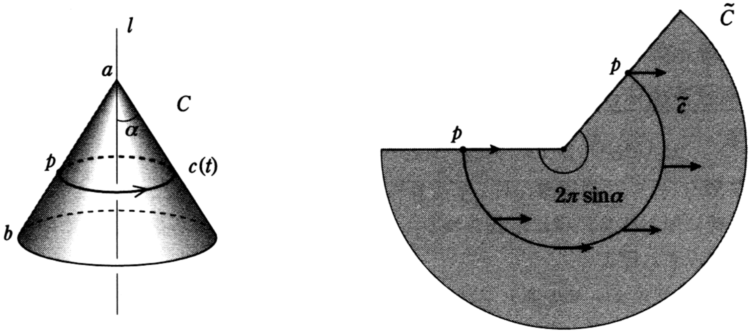


図 3.1

求める．頂点 $(0,0,1/\cos\beta)$, 中心角 $\pi/2-\beta$ で与えられる円錐面と球面は c を共有し，c の各点で接している．すなわち c 上円錐面と球面の接平面は一致している．したがって共変微分の定義 3.2 より，$\mathbf{S}^2$ と円錐面での c に沿う平行移動は一致し，例 2 から角 $2\pi(1-\cos\beta)$ の回転である．なお赤道 $(\beta=\pi/2)$ 上では，平行移動は恒等写像である．この場合，球面と円柱面が赤道において接している． □

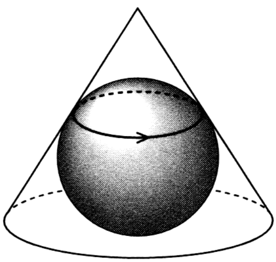


図 3.2

次節にうつる前に，例 3 において使った事実を，より一般的な命題としてまとめておく．

命題 3.4 ユークリッド空間の二つの部分多様体 M,N において，M と N の共通部分 $M\cap N$ に区分的に C^∞ 級の曲線 $c(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ が含まれている

とする．さらに各点 $c(t)$ において，M と N の接空間 $T_{c(t)}M$ と $T_{c(t)}N$ が一致しているとする．このとき M と N における c に沿う平行移動は一致する．

なお，向き付けられた 2 次元リーマン多様体における平行移動について，3.6 節において詳しく説明する．

3.3 曲率テンソル

本節では，線形接続の曲率テンソルを定義する．これは平行移動による無限小のズレを表すものであるが，多様体の幾何学や解析学における曲率の役割を簡単にいい表すことはできない．それを理解するためには，曲率テンソルをはじめ，テンソル場や微分形式，そしてそれらが表現するものを理解することが重要である．本節では，曲率テンソルの導入に続いて，テンソル場，微分形式，およびそれらの共変微分について学ぶ．

3.3.1 曲率テンソルの定義

多様体 M に線形接続 ∇ が与えられているとき，$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への写像 R を次のように定義する:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \quad (X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)).$$

これを，線形接続 ∇ の**曲率テンソル**という．定義に従って計算すると，曲率テンソル R は，各変数に関して $\mathbf{R}$ 上の線形写像で，さらに任意の C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z$$

を満たす．これは，$R(X,Y)Z$ が定める点 p での接ベクトル $(R(X,Y)Z)_p$ は，ベクトル場 X, Y, Z それぞれの点 p での値 $u = X_p, v = Y_p, w = Z_p$ で決まることを意味する (1.1.3 項参照)．したがって，曲率テンソル R は点 p において，$T_pM \times T_pM \times T_pM$ から T_pM への $\mathbf{R}$ 上の多重線形写像を与える．3.3.3 項で説明する用語を用いると，曲率テンソル R は M 上の (1,3) 次テンソル場を定義する，ということである．

さて，座標近傍 $(U,(x^1,\ldots,x^m))$ において曲率テンソル R を表現してみよ

う．$E_i = \partial/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおき，$\{\Gamma_{ij}^k\}$ を線形接続 ∇ のクリストッフェルの記号とする．$[E_i, E_j] = 0$ に注意して，定義に従って計算すると，

$$R(E_i, E_j)E_k = \sum_{\ell=1}^{m} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^{\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ell}}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^{m} (\Gamma_{ir}^{\ell}\Gamma_{jk}^{r} - \Gamma_{jr}^{\ell}\Gamma_{ik}^{r}) \right) E_{\ell}$$

となる．ここで

$$R_{ijk}^{\ell} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ell}}{\partial x^j} + \sum_{r=1}^{m} (\Gamma_{ir}^{\ell}\Gamma_{jk}^{r} - \Gamma_{jr}^{\ell}\Gamma_{ik}^{r})$$

とおくと，$X = \sum_{i=1}^{m} X^i E_i$, $Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j E_j$, $Z = \sum_{k=1}^{m} Z^k E_k$ に対して，

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} R_{ijk}^{\ell} X^i Y^j Z^k E_{\ell}$$

と表すことができる．

たとえば，$\mathbf{R}^m$ のユークリッド計量に関するレビ・チビタ接続 ∇^0 の場合，直交座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ から得られるベクトル場 $E_i = \partial/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ によって，$Z = \sum_{i=1}^{m} Z^i E_i$ と表すと，

$$\nabla_Y^0 Z = \sum_{i=1}^{m} Y(Z^i)E_i, \qquad \nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z = \sum_{i=1}^{m} X(Y(Z^i))E_i.$$

よって ∇^0 の曲率テンソル R^0 は，

$$R^0(X, Y)Z = \sum_{i=1}^{m} (X(Y(Z^i)) - Y(X(Z^i)))E_i - \sum_{i=1}^{m} [X, Y](Z^i)E_i = 0$$

となり，恒等的に 0 である．

3.3.2 線形代数からの準備

多様体上のテンソル場と微分形式について説明しよう．そのために本項では，線形代数からの準備をする．

$V_1, \ldots, V_k$ および W を有限次元実ベクトル空間とする．直積 $V_1 \times \cdots \times V_k$ から W への写像 F が**多重線形写像**とは，$F(v_1, \ldots, v_k)$ $(v_i \in V_i, i = 1, \ldots, k)$ において，各変数 v_i に対して線形写像となるものである．このような多重線形写像全体は，次のように自然に加法とスカラー積によってベクトル空間になる:

$$(\alpha F_1 + \beta F_2)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha F_1(v_1, \ldots, v_k) + \beta F_2(v_1, \ldots, v_k).$$

$V = V_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ のとき，簡単のため V^k によって，V の k 個の直積を表すことにする．$k = 1$ のとき，上のような写像は V から W への線形写像で，それら全体を $\mathrm{Hom}(V, W)$ で表す．とくに $W = \mathbf{R}$ の場合，$\mathrm{Hom}(V, \mathbf{R})$ を V の**双対空間**とよび，V^* で表す．V の元 v に対して，$v(\theta) = \theta(v)$ $(\theta \in V^*)$ とおいて，v を $V^{**} = (V^*)^*$ の元とみなす．V は有限次元なので，この対応で自然に V と V^{**} は線形同形となり，これらを同一視する．

さて非負整数 s と t の組 (s, t) に対して，m 次元ベクトル空間 V に付属する (s, t) **次テンソル** F とは，$(V^*)^s \times V^t$ から $\mathbf{R}$ への多重線形写像 (関数) のことである．(s, t) 次テンソル全体のなすベクトル空間を $\mathcal{T}_t^s(V)$ と記す．$s = 0$ のとき $F : V^t \to \mathbf{R}$ と考え，$t = 0$ のとき $F : (V^*)^s \to \mathbf{R}$ と考える．なお，$\mathcal{T}_1^0(V) = V^*$，$\mathcal{T}_0^1(V) = V^{**} = V$ である．また，便宜上 $s = t = 0$ のとき，$\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbf{R}$ とおく．

$\mathcal{T}_t^s(V)$ の元 F と $\mathcal{T}_{t'}^{s'}(V)$ の元 G に対して，$\mathcal{T}_{t+t'}^{s+s'}(V)$ の元 $T \otimes G$ を

$$\begin{aligned}(F \otimes G)&(\theta^1, \ldots, \theta^{s+s'}, v_1, \ldots, v_{t+t'})\\ &= F(\theta^1, \ldots, \theta^s, v_1, \ldots, v_t)\, G(\theta^{s+1}, \ldots, \theta^{s+s'}, v_{t+1}, \ldots, v_{t+t'})\end{aligned}$$

によって定義する．$F \otimes G$ を F と G の**テンソル積**という．$s' = t' = 0$，すなわち G がスカラー α のとき，$F \otimes \alpha = \alpha \otimes F = \alpha F$ となる．テンソル積

$$\otimes : \mathcal{T}_t^s(V) \times \mathcal{T}_{t'}^{s'}(V) \to \mathcal{T}_{t+t'}^{s+s'}(V)$$

は双線形である．また結合法則 $(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H)$ を満たすので，$F \otimes G \otimes H$ と表す．たとえば，$V = \mathcal{T}_0^1(V)$ の元 $x_1, \ldots, x_s$ に対して $x_1 \otimes \cdots \otimes x_s$ は $\mathcal{T}_0^s(V)$ の元であり，$V^* = \mathcal{T}_1^0(V)$ の元 $\omega^1, \ldots, \omega^t$ に対して $\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^t$ は $\mathcal{T}_t^0(V)$ の元である．ここで $x_1 \otimes \cdots \otimes x_s \otimes \omega^1 \cdots \otimes \omega^t$ は $\mathcal{T}_t^s(V)$ の元を定め，$\theta^1, \ldots, \theta^s \in V^*$ と $v_1, \ldots, v_t \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}x_1 \otimes \cdots \otimes x_s \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^t&(\theta^1, \ldots, \theta^s, v_1 \ldots, v_t)\\ &= x_1(\theta^1) \cdots x_s(\theta^s) \omega^1(v_1) \cdots \omega^t(v_t)\\ &= \theta^1(x_1) \cdots \theta^s(x_s) \omega^1(v_1) \cdots \omega^t(v_t).\end{aligned}$$

となる．したがって $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし，$\{e^1, \ldots, e^m\}$ をその双対基底とすると，

$$\mathcal{B} = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_t} \mid 1 \leqq i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_t \leqq m\}$$

は $\mathcal{T}_t^s(V)$ の基底をなす．実際，$F \in \mathcal{T}_t^s(V)$ に対して，

$$F_{j_1\cdots j_t}^{i_1\cdots i_s} = F(e^{i_1}, \ldots, e^{i_s}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_t})$$

とおいて，

$$F = \sum_{i_*, j_*=1}^{m} F_{j_1\cdots j_t}^{i_1\cdots i_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_t}$$

と一意的に表すことができる．$\{F_{j_1\cdots j_t}^{i_1\cdots i_s}\}$ を F の基底 $\mathcal{B}$ に関する**成分**という．$\mathcal{T}_{t'}^{s'}(V)$ の元 G を

$$G = \sum_{i_*, j_*=1}^{m} G_{j_1\cdots j_{t'}}^{i_1\cdots i_{s'}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{s'}} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{t'}}$$

と表すと，テンソル積 $F \otimes G$ の成分は以下のようになる:

$$(F \otimes G)_{j_1\cdots j_{t+t'}}^{i_1\cdots i_{s+s'}} = F_{j_1\cdots j_t}^{i_1\cdots i_s}\, G_{j_{t+1}\cdots j_{t+t'}}^{i_{s+1}\cdots i_{s+s'}}.$$

ここで (1,1) 次テンソル $F : V^* \times V \to \mathbf{R}$ の場合をとり上げよう．V の元 u を一つ固定すると，$\theta \to F(\theta, u)$ は V^* の双対空間，すなわち V 自身の元 $v(F,u)$ を定める．F の双線形性より，対応 $u \to v(F,u)$ は V からそれ自身への線形写像，つまり $\mathrm{Hom}(V,V)$ の元を定める．それを $\phi(F)$ とすると，ϕ は $\mathcal{T}_1^1(V)$ から $\mathrm{Hom}(V,V)$ への線形写像を与える．定義から，ϕ は 1 対 1 であり，$\dim \mathcal{T}_1^1(V) = \dim \mathrm{Hom}(V,V) = m^2$ であるから，ϕ は線形同形写像である．このことは成分表示してみるとわかりやすい．$F = \sum_{i,j=1}^{m} F_j^i e_i \otimes e^j$ とすると，

$$\phi(F)(u) = \sum_{i,j=1}^{m} F_j^i e^j(u) e_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} F_j^i u^j \right) e_i \qquad \left(u = \sum_{j=1}^{m} u^j e_j \in V \right)$$

となり，$\phi(F)$ は基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ に関する行列表示が $\left(F_j^i\right)$ である V の一次変換である．ここで

$$C(F) = \sum_{i=1}^{m} F_i^i = \sum_{i=1}^{m} F(e^i, e_i)$$

とおき，(1,1) 次テンソル F の**縮約**という．すなわち $\phi(F)$ のトレースのことである．$F = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k x_k \otimes \omega^k$ ($\alpha_k \in \mathbf{R}$, $x_k \in V$, $\omega^k \in V^*$) と表される (1,1) 次テンソル F の場合は，$C(F) = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \omega^k(x_k)$ となる．

同様に，$\mathcal{T}_t^1(V)$ の元を，V^t から V への多重線形写像と自然にみなすことが

できる．

さて縮約を一般のテンソルにも定義する．$s, t \geqq 1$ とする．各組 (i,j) $(1 \leqq i \leqq s, 1 \leqq j \leqq t)$ に対して，縮約 $C^i_j : \mathcal{T}^s_t(V) \to \mathcal{T}^{s-1}_{t-1}(V)$ を次のように定義する．$\mathcal{T}^s_t(V)$ の元 F に対して，まず V^* の元 $\theta^1, \ldots, \theta^{s-1}$ と V の元 $v_1, \ldots, v_{t-1}$ を任意にとり，$V^* \times V$ から $\mathbf{R}$ への写像を

$$(\omega, u) \to F(\theta^1, \ldots, \theta^{i-1}, \omega, \theta^i, \ldots, \theta^{s-1}, v_1, \ldots, v_{j-1}, u, v_j, \ldots, v_{t-1})$$

によって定義すると，これは (1,1) 次テンソルを定め，これを縮約して得られるスカラーを

$$(C^i_j F)(\theta^1, \ldots, \theta^{s-1}, v_1, \ldots, v_{t-1})$$

とおく．このようにして得られる $(V^*)^{s-1} \times V^{t-1}$ 上の関数 $C^i_j F$ は，$(s-1, t-1)$ 次テンソルを定める．ここで $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とすると，

$$\begin{aligned}
&(C^i_j F)(\theta^1, \ldots, \theta^{s-1}, v_1, \ldots, v_{t-1}) \\
&\quad = \sum_{k=1}^m F(\theta^1, \ldots, \theta^{i-1}, e^k, \theta^i, \ldots, \theta^{s-1}, v_1, \ldots, v_{j-1}, e_k, v_j, \ldots, v_{t-1})
\end{aligned}$$

である．

たとえば，(1,3) 次テンソル $F = \sum F^r_{ijk} e_r \otimes e^i \otimes e^j \otimes e^k$ に対して，$C^1_1 F$ は

$$C^1_1 F = \sum_{r=1}^m F^r_{rjk} e^j \otimes e^k$$

と表示される．また $F \in \mathcal{T}^0_t(V)$ と $x_1, \ldots, x_t \in V$ に対して，

$$F(x_1, \ldots, x_t) = \underbrace{C^1_1 \cdots C^1_1}_{t\ \text{個}}(F \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_t)$$

となる．

次に交代形式と外積を説明しよう．$(0,t)$ 次テンソル F が**歪対称**である，あるいは**交代的**であるとは，V の任意の元 $v_1, \ldots, v_t$ と，t 個の文字 $\{1, 2, \ldots, t\}$ の置換 σ に対して，

$$F(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(t)}) = \mathrm{sign}(\sigma) F(v_1, \ldots, v_t)$$

が成り立つことである．ここで $\mathrm{sign}(\sigma)$ は置換 σ の符号 (偶置換ならば 1，奇置換ならば -1) を表す．歪対称 $(0,t)$ 次テンソルを t **次交代形式**とよぶ．これらは $\mathcal{T}^0_r(V)$ の線形部分空間をなすが，それを $\wedge^t(V^*)$ と記し，$\wedge^0(V^*) = \mathbf{R}$

と約束する．また $\wedge^1(V^*) = \mathcal{T}_1^0(V) = V^*$ である．

すべての置換 σ に対して $F(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(t)}) = F(v_1, \ldots, v_t)$ のとき，F を**対称テンソル**という．

ここで $F \in \mathcal{T}_t^0(V)$ に対して，$\wedge^t(V^*)$ の元 $\mathcal{A}F$ を次のように定義する:

$$\mathcal{A}F(v_1, \ldots, v_t) = \frac{1}{t!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) F(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(t)}) \quad (v_1, \ldots, v_t \in V).$$

ただし右辺は，$\{1, 2, \ldots, t\}$ の置換 σ すべてに関する和をとったものである．このとき $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ であり，交代形式は $\mathcal{A}(F) = F$ を満たすテンソル F として特徴づけられる．さらに s 次交代形式 F と t 次交代形式 G に対して，$(s+t)$ 次交代形式 $F \wedge G$ を次のように定義する:

$$F \wedge G = \frac{(s+t)!}{s!\,t!}\mathcal{A}(F \otimes G).$$

これを F と G の**外積**とよぶ．外積は双線形であり，結合法則を満たすので，交代形式全体のなすベクトル空間 $\wedge(V^*) = \bigoplus_t \wedge^t(V^*)$ は，外積によって $\mathbf{R}$ 上の加群となる．これをベクトル空間 V^* 上の**外積代数** (あるいは**グラスマン代数**) とよぶ．

次に，テンソル積と外積の満たす基本的性質 (i)–(iv) を述べる．

(i) $F_i \in \wedge^{t_i}(V^*)$ $(i = 1, \ldots, k)$ に対して，

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k = \frac{(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)!}{t_1!\,t_2! \cdots t_k!}\mathcal{A}(F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_k).$$

とくに $\theta^1, \ldots, \theta^s \in V^*$，$v_1, \ldots, v_s \in V$ に対して，

$$(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^s)(v_1, \ldots, v_s) = \det\big(\theta^i(v_j)\big)$$

となる．ただし右辺は s 次行列 $\big(\theta^i(v_j)\big)$ の行列式を表す．

(ii) $F \in \wedge^s(V^*)$ と $G \in \wedge^t(V^*)$ に対して，

$$F \wedge G = (-1)^{st} G \wedge F.$$

とくに $\omega \in \wedge^1(V^*) = V^*$ に対して，$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ より $\omega \wedge \omega = 0$ となる．

(iii) $t > m = \dim V$ ならば，$\wedge^t(V^*) = \{0\}$．$0 \leqq t \leqq m$ ならば，$\dim \wedge^t(V^*) = m!/(m-t)!\,t!$．実際，$\{e^1, \ldots, e^m\}$ を V^* の基底とすると，$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_t} \mid 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqq m\}$ が $\wedge^t(V^*)$ の基

底である．

(iv) ベクトル空間 V, W と線形写像 $\psi : V \to W$ が与えられたとき，$F \in \mathcal{T}_t^0(W)$ に対して，$\mathcal{T}_t^0(V)$ の元 ψ^*F (ψ による F の引き戻し) を

$$(\psi^*F)(v_1, \cdots, v_t) = F(\psi(v_1), \ldots, \psi(v_t)) \qquad (v_1, \ldots, v_t \in V)$$

によって定義する．各次数 t に対して，ψ^* は $\mathcal{T}_t^0(W)$ から $\mathcal{T}_t^0(V)$ への線形写像であり，さらにテンソル積に関して準同形である．すなわち

$$\psi^*(F \otimes G) = \psi^*F \otimes \psi^*G$$

を満たす．交代形式に関しても，$\wedge^t(W^*)$ から $\wedge^t(V^*)$ への線形写像となり，外積に関して準同形である:

$$\psi^*(F \wedge G) = \psi^*F \wedge \psi^*G.$$

このように，線形写像 $\psi : V \to W$ は外積代数 $\wedge(W^*)$ から $\wedge(V^*)$ への準同形 ψ^* を自然に誘導する．

さて，m 次元ベクトル空間 V には (0,2) 次正定値対称テンソル，つまり内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする．このとき $\mathcal{T}_t^s(V)$ 上に次のように内積を定義する．まず V^* の元 ω に対して，$\omega(x) = \langle \omega^\sharp, x\rangle$ $(\forall x \in V)$ を満たす V の元 $\omega^\sharp$ がただ一つ存在する．この対応 $\omega \to \omega^\sharp$ は，V^* から V への線形同形を与えるが，この引き戻しによって V^* 上に内積を定義し，同じ記号 $\langle\ ,\ \rangle$ で表す．すなわち

$$\langle \omega, \eta\rangle = \langle \omega^\sharp, \eta^\sharp\rangle \qquad (\omega, \eta \in V^*).$$

このとき，V^* の元 ω と V の元 $\omega^\sharp$ は，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して双対の関係にあるという．さらに $\mathcal{T}_t^s(V)$ の元 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_s \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^t$ と $y_1 \otimes \cdots \otimes y_s \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^t$ に対して，

$$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_s \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^t, y_1 \otimes \cdots \otimes y_s \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^t\rangle$$
$$= \langle x_1, y_1\rangle \cdots \langle x_s, y_s\rangle \langle \omega^1, \eta^1\rangle \cdots \langle \omega^t, \eta^t\rangle$$

と定義する．これは $\mathcal{T}_t^s(V)$ 上に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定める．ここで，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底，$\{e^1, \ldots, e^m\}$ をその双対基底とし，$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$，$g^{ij} = \langle e^i, e^j\rangle$ とおく．定義から $\sum_{j=1}^m g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$ (δ_{ik} はクロネッカーのデルタ)，すなわち

行列 (g^{ij}) は行列 (g_{ij}) の逆行列である．このとき，$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i e^i$ に対して，$\omega^\sharp = \sum_{i=1}^{m} \omega^i e_i$ は，$\omega^i = \sum_{j=1}^{m} \omega_j g^{ji}$ $(i = 1, \ldots, m)$ によって与えられる．このように，$\omega^\sharp$ は ω と内積のテンソル積を一度縮約して得られるベクトルである．また，$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i e^i$, $\eta = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e^i$ に対して，

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{i,j=1}^{m} \omega_i \eta_j g^{ij} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \eta^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^i \eta_i$$

となる．一般に

$$F = \sum_{i_*, j_*=1}^{m} F^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_t} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_t}$$

と

$$G = \sum_{i_*, j_*=1}^{m} G^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_t} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_t}$$

に対して

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i_*, j_*, k_*, \ell_*=1}^{m} F^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_t} G^{k_1 \cdots k_s}_{\ell_1 \cdots \ell_t} g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_s k_s} g^{j_1 \ell_1} \cdots g^{j_t \ell_t}$$

と表される．基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ が V の正規直交基底であるならば，すなわち $g_{ij} = \delta_{ij}$ ならば，$\{e^1, \ldots, e^m\}$ も V^* の正規直交基底を与え，

$$\langle F, G \rangle = \sum_{i_*, j_*=1}^{m} F^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_t} G^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_t}$$

と表される．

ここで一つの約束をしておく．交代形式を考える場合は，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定数倍だけ変更する．正確には $\omega, \eta \in \wedge^t(V^*)$ に対して，

$$(\omega, \eta) = \frac{1}{t!} \langle \omega, \eta \rangle = \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_t \leqq m} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_t})\, \eta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_t})$$

によって交代形式の内積 $(\ ,\ )$ を定義する．ここで，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ は V の正規直交基底である．この内積 $(\ ,\ )$ に関して，$\{e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_t} \mid 1 \leqq j_1 < \cdots < j_t \leqq m\}$ が $\wedge^t(V^*)$ の正規直交基底となる．

3.3.3 テンソル場と微分形式

本項では，多様体上のテンソル場，微分形式と外微分について説明する．ま

ず，多様体 M 上の (s,t) 次テンソル場の定義からはじめる．M の各点 p に対して，接空間 T_pM に付属する (s,t) 次テンソルを対応させる規則 F で，M の任意の開集合 U とそこで定義されている任意の 1 次微分形式 $\theta^1,\ldots,\theta^s$，およびベクトル場 $X_1,\ldots,X_t$ に対して，U 上の関数

$$F(\theta^1,\ldots,\theta^s,X_1,\ldots,X_t)(p)$$
$$= F_p(\theta^1(p),\ldots,\theta^s(p),X_1(p),\ldots,X_t(p)) \qquad (p\in U)$$

が C^∞ 級となるものを，M 上の (s,t) 次**テンソル場**という (s 次反変 t 次共変テンソル場とよぶこともある)．M の開集合として M 自身をとって考えると，(s,t) 次テンソル場 F は，M 上の任意の s 個の 1 次微分形式 $\theta^1,\ldots,\theta^s$ と t 個のベクトル場 $X_1,\ldots,X_t$ に対して，M 上の C^∞ 級関数 $F(\theta^1,\ldots,X_t)$ を対応させる写像であるが，各変数に関して $C^\infty(M)$ 上線形である．すなわち，第一番目の変数でみると，

$$F(f\theta+h\omega,\theta^2,\ldots,\theta^s,X_1,\ldots,X_t)$$
$$= fF(\theta,\theta^2,\ldots,\theta^s,X_1,\ldots,X_t)+hF(\omega,\theta^2,\ldots,\theta^s,X_1,\ldots,X_t)$$
$$(f,h\in C^\infty(M),\ \theta,\omega,\theta^2,\ldots,\theta^s\in A^1(M),\ X_1,\ldots,X_t\in\mathcal{X}(M)).$$

ほかの変数に関しても同様である．

逆に，このような s 個の 1 次微分形式と t 個のベクトル場を変数とする $C^\infty(M)$ への写像は，$C^\infty(M)$ 上多重線形であれば，(s,t) 次テンソル場を定める．実際，M の点 p において，$F(\theta^1,\ldots,X_t)$ の値は s 個の 1 次微分形式と t 個のベクトル場それぞれの点 p での値にのみ依存して決まり，$\mathcal{T}_t^s(T_pM)$ の元 F_p を定める (1.1.3 項参照)．

多様体 M 上の (s,t) 次テンソル場全体のなすベクトル空間を $\mathcal{T}_t^s(M)$ と表す．このとき，$\mathcal{T}_0{}^0(M),\mathcal{T}_0{}^1(M),\mathcal{T}_1{}^0(M)$ はそれぞれ

$$\mathcal{T}_0^0(M)=C^\infty(M),\qquad \mathcal{T}_0^1(M)=\mathcal{X}(M),\qquad \mathcal{T}_1^0(M)=A^1(M)$$

となる．また $F\in\mathcal{T}_t^0(M)$ に対して，各点 p において F_p が t 次形式，すなわち $F_p\in\wedge^t(T_p^*M)$ となっているものを M 上の t 次**微分形式**とよび，これら全体のなすベクトル空間を $A^t(M)$ と記す．ここで $A^0(M)=C^\infty(M)$ である．

さらに，多様体 M 上のテンソル場のテンソル積，縮約，微分形式の外積な

どが，M の各点ごとのテンソル積，縮約，外積によって定義される．

ここで，局所座標系を使ってテンソル場と微分形式を表してみる．M の座標近傍 $(U,(x^1,\ldots,x^m))$ において，(s,t) 次テンソル場 F は，

$$F=\sum_{i_*,j_*=1}^{m} F^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_t}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_t}$$

と一意的に表現される．$\{F^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_t}\}$ は U 上の m^{s+t} 個の C^∞ 級関数で，F の (局所座標系 $(x^1,\ldots,x^m)$ に関する) **成分**という．t 次微分形式については，一意的に

$$F=\sum_{1\leqq j_1<\cdots<j_t\leqq m} F_{j_1\cdots j_t}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_t}$$

と表現される．ここで $\{1,\ldots,t\}$ の置換 σ に対して，

$$F_{j_{\sigma(1)}\cdots j_{\sigma(t)}}=\mathrm{sign}(\sigma)F_{j_1\cdots j_t}$$

に注意すると，次のように表すこともできる:

$$F=\frac{1}{t!}\sum_{j_*=1}^{m} F_{j_1\cdots j_t}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_t}.$$

次に微分形式の外微分について簡単に説明する．

定義 3.4 (**定理**)　多様体 M 上の微分形式全体 $A(M)=\sum_{t=0}^{m}A^t(M)$ のなす外積代数において，次の性質 (i)–(iii) を満たす線形写像 $d_M : A(M)\to A(M)$ がただ一つ存在する．

(i) $f\in C^\infty(M)$ に対して，$d_M f$ は 関数 f の微分の定める 1 次微分形式 df そのものである．

(ii) $\omega\in A^t(M)$ と $\eta\in A^r(M)$ に対して，次式が成り立つ:

$$d_M(\omega\wedge\eta)=d_M\omega\wedge\eta+(-1)^t\omega\wedge d_M\eta.$$

(iii) $d_M\circ d_M=0$.

このとき，微分形式 ω に対して，$d_M\omega$ をその**外微分**という．

さらに，M の開集合 (開部分多様体) U に対して，M 上の微分形式 ω の U への制限を $\omega_{|U}$ と表すとき，$(d_M\omega)_{|U}=d_U\omega_{|U}$ が成り立つ．このことから以後 $d_M\omega$ の代わりに簡単に $d\omega$ と記すことにする．

外微分の定義や基本的性質に関するより詳しい説明は，たとえば [3, 4, 5, 7]

などにある．ここでは，外微分の局所座標系による表現を確認しておく．まず，$\omega = h\,df^1 \wedge \cdots \wedge df^t$ $(h, f^1, \ldots, f^t \in C^\infty(M))$ という形の t 次微分形式 ω に対して，上述の (i), (ii), (iii) により $d\omega = dh \wedge df^1 \wedge \cdots \wedge df^t$ となることに注意する．次に，座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ において，t 次微分形式 ω を

$$\omega = \frac{1}{t!} \sum_{j_1, \ldots, j_t = 1}^{m} \omega_{j_1 \cdots j_t} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_t}$$

と表すと，

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{t!} \sum_{j_1, \ldots, j_t = 1}^{m} d\omega_{j_1 \cdots j_t} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_t} \\ &= \frac{1}{t!} \sum_{j_1, \ldots, j_t = 1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \omega_{j_1 \cdots j_t}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_t} \\ &= \sum_{1 \leqq i_0 < \cdots < i_t \leqq m} \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_s}} w_{i_0 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_t} \right) dx^{i_0} \wedge \cdots \wedge dx^{i_t}. \end{aligned}$$

このことから，定義 3.4 で述べた外微分が存在するならば，一意的であることがわかるであろう．実際，上記の $d\omega$ の表現は U 上の局所座標系のとり方によらないことが，ω の成分の座標変換による変換則により確かめることができる．したがって，M を座標近傍で被覆して上記のように各座標近傍上で ω を定めてやれば，$d\omega$ は M 全体で定義された $(t+1)$ 次微分形式であることがわかる．このとき (i) と (ii) は明らかであり，(iii) は C^∞ 級関数 f に対して，$\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j = \partial^2 f / \partial x^j \partial x^i$ という事実から従う．

さて，多様体 N から M への C^∞ 級写像 $\phi\colon N \to M$ は，引き戻しによって $A(M)$ から $A(N)$ への線形写像 ϕ^* を定義する．つまり $\omega \in A(M)$ に対して，$\phi^*\omega = (d\phi)^*\omega$ と定める．このとき，ϕ^* は外微分と可換であることに注意する．すなわち，

$$d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$$

である．また，M の座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^m))$ において

$$\omega = \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_t \leqq m} \omega_{j_1 \cdots j_t} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_t}$$

と表すと，$\phi^i = x^i \circ \phi$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいて，$\phi^{-1}(U)$ 上

$$\phi^*\omega = \sum_{1 \leqq j_1 < \cdots < j_t \leqq m} \phi^*\omega_{j_1 \cdots j_t} d\phi^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\phi^{j_t}$$

である．

例題 3.5　$\omega \in A^1(M)$ と $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して，次が成り立つ:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

証明　右辺によって定義される $\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)$ から $C^\infty(M)$ への写像 F は $C^\infty(M)$ 上の双線形写像で反対称であるから，M 上の 2 次微分形式を定める．したがって $d\omega = F$ を示すには，座標近傍 $(U,(x^1,\ldots,x^m))$ において一致することを示せば十分である．さらに，U 上において $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx^i$ と表されるので，$\omega = f\,dh$ $(f,h\in C^\infty(U))$ の場合に示せばよい．このときには，

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) = (df\wedge dh)(X,Y) &= df(X)dh(Y) - df(Y)dh(X) \\ &= X(f)Y(h) - X(h)Y(f). \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} F(X,Y) &= X(fY(h)) - Y(fX(h)) - f[X,Y](h) \\ &= X(f)Y(h) + fX(Y(h)) - Y(f)X(h) - fY(X(h)) - f[X,Y](h) \\ &= X(f)Y(h) - Y(f)X(h). \end{aligned}$$

このようにして，$d\omega = F$ が従う．■

練習問題 3.1　$\omega \in A^t(M)$ と $X_0,\ldots,X_t \in \mathcal{X}(M)$ に対して，

$$\begin{aligned} d\omega(X_0,X_1,\ldots,X_t) &= \sum_{i=0}^t (-1)^i X_i(\omega(X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_t)) \\ &\quad + \sum_{0\leqq i<j\leqq t} (-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_t) \end{aligned}$$

が成り立つ．これを示せ．ここで $\widehat{X_i}$ と記されたところは削除を意味している．

t 次微分形式 ω に対して，その外微分が恒等的に 0 $(d\omega = 0)$ のとき，ω を**閉微分形式**，あるいは簡単に**閉形式**という．また，ある $(t-1)$ 次微分形式 η があって $\omega = d\eta$ となるとき，ω を**完全微分形式**，あるいは簡単に**完全形式**という．なお，定義 3.4 (iii) より，完全形式は閉形式である．

例題 3.6　多様体 M 上の 1 次微分形式 ω が閉微分形式のとき，二点を結ぶ二つの区分的に C^∞ 級である曲線 c_0 と c_1 に対して，それらが両端を固定して区分的に C^∞ 級の変形が可能であるならば，線積分 $\int_{c_0}\omega$ と $\int_{c_1}\omega$ は等しい．

とくに M の単連結な領域 U において，点 p を一つ固定し，U の各点 q に対して，p と q を結ぶ区分的に C^∞ 級の (U 内の) 曲線 c をとり，$f(q)=\int_c \omega$ と定義する．このとき，f は $\omega = df$ を満たす U 上の C^∞ 級関数である．

証明　二つの区分的に C^∞ 級である曲線 $c_0(t)$ と $c_1(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を結ぶ両端を固定する区分的に C^∞ 級のホモトピー写像を $H = H(t,s) : [a,b]\times[0,1] \to M$ とする．$S = dH(\partial/\partial s)$，$T = dH(\partial/\partial t)$ とおいて，

$$
\begin{aligned}
\int_{c_1}\omega - \int_{c_0}\omega &= \int_a^b (\omega(T)(t,1) - \omega(T)(t,0))\,dt \\
&= \int_a^b \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\omega(T)\,dsdt \\
&= \int_a^b \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\omega(S) + d\omega(S,T)\right) dsdt \\
&= \int_0^1 (\omega(S)(b,s) - \omega(S)(a,s))\,ds + \int_a^b \int_0^1 d\omega(S,T)\,dsdt \\
&= \int_a^b \int_0^1 d\omega(S,T)\,dsdt
\end{aligned}
$$

となる．よって $d\omega = 0$ ならば，二つの線積分は等しい．

残りの主張は，課題として残しておく．　∎

▶ **例 4**　多様体 M 上の線形接続 ∇ に対して，そのねじれ率テンソル T は (1,2) 次テンソル場，その曲率テンソル R は (1,3) 次テンソル場である．別の線形接続 $\widetilde{\nabla}$ に対して，二つの接続の差 $\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ $(X, Y \in \mathcal{X}(M))$ を考える．前項において説明したように，これは (1,2) 次テンソル場を定める．それを F とすれば，

$$
\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + F(X,Y). \tag{3.11}
$$

逆に，(1,2) 次テンソル場 F に対して，(3.11) によって $\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への写像 $\widetilde{\nabla}$ を定義すれば，これは線形接続となる．このように，M 上の線形接続を一つ固定しておけば，線形接続と (1,2) 次テンソル場は 1 対 1 に対応する．たとえば，$\widetilde{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}T$ によって線形接続 $\widetilde{\nabla}$ を定義すると，$\widetilde{\nabla}$ は対称となり，さらに C^∞ 級曲線 c に対して，

$$
\widetilde{\nabla}_{c'}c' = \nabla_{c'}c' - \frac{1}{2}T(c',c') = \nabla_{c'}c'
$$

より，$\widetilde{\nabla}$ と ∇ の測地線は一致することがわかる．　□

多様体 M 上のリーマン計量 g は，各点 p において，$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$ が対称かつ正定値である M 上の (0,2) 次テンソル場のことである．これは，各点 p の接空間 T_pM 上のテンソル空間 $T_t^s(T_pM)$ の内積を定義する．これを簡単に $\langle\ ,\ \rangle_g$ と表す．また，交代形式のベクトル空間 $\wedge^t(T_p^*M)$ に内積が定まり，それを $(\ ,\ )_g$ と記す．

3.3.4 ストークスの定理

多様体の向きについて 2.5.3 項において説明したが，ここでは微分形式を使って説明する．さらにストークスの定理を述べる．

まず次の命題からはじめる．

命題 3.7 m 次元多様体 M が向き付け可能であることと，M 上いたるところ 0 にならない m 次微分形式が存在することは同値である．

証明 M 上いたるところ 0 にならない m 次微分形式 ω が存在するとき，これによって M の向きが次のように定まる．各点 p の接空間 T_pM の標構 $\xi = (v_1, \ldots, v_m)$ に対して，$\omega_p(v_1, \ldots, v_m) > 0$ のとき ξ は正の標構であると定義し，これによって M の向きを定める．領域 (連結開集合) U 上の標構場 $(X_1, \ldots . X_m)$ に対して，$\omega(X_1, \ldots, X_m)$ は一定の符号をもつ C^∞ 級関数であるが，これが正値のとき，正の標構場となる．したがって，U 上に局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ が定義されるとすれば，$\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^m) > 0$ のとき，$(x^1, \ldots, x^m)$ は正の局所座標系となる．

次に M が向き付けられているとする．$\{(U_\alpha, (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^m)) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ を M の相対コンパクトな座標近傍からなる局所有限被覆で，各局所座標系 $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^m)$ が正であるものをとる．$\{\rho_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に従属する単位の分解とし，M 上の m 次微分形式を $\omega = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m$ によって定義する．このとき，共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ が空集合でないとき，$U_\alpha \cap U_\beta$ において，ヤコビ行列 $\left(\partial x_\beta^i / \partial x_\alpha^j\right)$ の行列式 $\det\left(\partial x_\beta^i / \partial x_\alpha^j\right)$ は正であるから，各 U_α において，

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^m}\right) = \sum_\beta \rho_\beta \det\left(\frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\right) > 0$$

となる．ここで右辺は，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ である添え字 β についての有限和である．このように，ω は M 上いたるところ 0 にはならない m 次微分形式で，M の向きを定めている． ∎

次に，向き付けられた m 次元多様体 M において，m 次微分形式の積分を

定義する．$(U_\alpha,(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^m))$，$\{\rho_\alpha\}$ を上の命題の証明における正の座標近傍の族とそれに従属する単位の分解とする．台がコンパクトな m 次微分形式 η に対して，その積分を

$$\int_M \eta = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \eta_\alpha \, dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \qquad \left(\eta_\alpha = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_\alpha^m}\right)\right)$$

によって定義する．リーマン測度による関数の積分の場合と同様に，これは上記のような座標近傍と単位の分解のとり方によらないことが確かめられる．

たとえば，M から多様体 N への C^∞ 級写像 f と N 上の m 次微分形式 ξ に対して，f による引き戻し $f^*\xi$ は M 上の m 次微分形式であり，その台がコンパクトであれば，積分 $\displaystyle\int_M f^*\xi$ が定義される．M が 1 次元の場合は，N の曲線に沿う 1 次微分形式の線積分にほかならない．なお，曲線の向きを変えると，線積分は符号だけ異なる．

一般に，M の向きを変えたものを，M と区別して M^- と表すと，台がコンパクトな m 次微分形式 η に対して，M^- における積分は符号だけ異なる．すなわち

$$\int_{M^-} \eta = -\int_M \eta.$$

さて，M にリーマン計量 g が与えられているとする．$\{U_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\}$ を M の開被覆で，各 U_α において正の正規直交標構場 $(E_1^{(\alpha)},\dots,E_m^{(\alpha)})$ が定義されているとする．$(\omega_1^{(\alpha)},\dots,\omega_m^{(\alpha)})$ を，$\omega_i^{(\alpha)}(E_j^{(\alpha)}) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) を満たす U_α 上の 1 次微分形式の組とする．このとき $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば，$U_\alpha \cap U_\beta$ において $\omega_1^{(\alpha)} \wedge \cdots \wedge \omega_m^{(\alpha)}$ と $\omega_1^{(\beta)} \wedge \cdots \wedge \omega_m^{(\beta)}$ は一致する．したがって

$$\omega_g = \omega_1^{(\alpha)} \wedge \cdots \wedge \omega_m^{(\alpha)}$$

は M 全体で定義された m 次微分形式を定める．これをリーマン計量 g の**体積要素**とよぶ．ここで，正の座標近傍 $(U,(x^1,\dots,x^m))$ において，$g = \sum_{i=1}^m g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ と表すとき，体積要素 ω_g は

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

と表すことができる．さらに任意の m 次微分形式 η に対して，点 p における η_p と $(\omega_g)_p$ の内積を $(\eta,\omega_g)_g(p)$ とすると，$\eta = (\eta,\omega_g)_g \omega_g$ と表され，積分に

ついて

$$\int_M \eta = \int_M (\eta, \omega_g)_g \omega_g = \int_M (\eta, \omega_g)_g \, d\mu_g$$

となる．ここで μ_g は g のリーマン測度を表す．

次節に進む前に，**ストークスの定理**を述べる．向き付けられた多様体 M の相対コンパクトな滑らかな境界をもつ領域 A を考え，境界 bA 上の外向き法ベクトル場を ν_{bA} とする．点 p における接空間 $T_p(bA)$ における標構 $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ に対して，$(\nu_{bA}, v_1, \ldots, v_{m-1})$ が T_pM の正の標構となるように bA に向きを定める．このように向き付けられた境界を ∂A と表すことにする．

定理 3.8 向き付けられた m 次元多様体 M の相対コンパクトな滑らかな境界をもつ領域 A と $(m-1)$ 次微分形式 η に対して，

$$\int_A d\eta = \int_{\partial A} \iota^* \eta$$

が成り立つ．ここで $\iota^*\eta$ は包含写像 $\iota : bA \to M$ による η の引き戻しを表す．

この定理は，発散公式 (定理 1.6) と同じ内容であるといってもよいのであるが，証明は 4.8 節での演習問題として残しておく．

3.4 テンソル場の共変微分

多様体 M 上に線形接続 ∇ が与えられているとき，(s, r) 次テンソル場 F のベクトル場 X による共変微分 $\nabla_X F$ を定義したい．その前にまず 3.2.2 項の考察を思い出そう．C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a < t < b)$ に対して，パラメータ τ を一つ固定し，$T_{c(\tau)}M$ の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を一つとる．各 e_i を c に沿って平行に移動して得られるベクトル場を $E_i(t)$ $(a < t < b)$ とする．このとき，$\{E_1(t), \ldots, E_m(t)\}$ は $T_{c(t)}M$ の基底となる．ここで，$\{E^1(t), \ldots, E^m(t)\}$ をその双対基底とすると，c に沿って F を一意的に

$$F = \sum_{i_*, j_* = 1}^{m} F^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_r}(t) \; E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_s} \otimes E^{j_1} \otimes \cdots \otimes E^{j_r}$$

と表すことができる．よって，c に沿う共変微分を

$$\nabla_{c'(t)} F = \sum_{i_*, j_* = 1}^{m} \frac{d}{dt} F^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_r}(t) \; E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_s} \otimes E^{j_1} \otimes \cdots \otimes E^{j_r}$$

と定義すればよい．このとき 二つのテンソル場 F と G のテンソル積 $F \otimes G$ に対して，

$$\nabla_{c'(t)}(F \otimes G) = \nabla_{c'(t)}F \otimes G + F \otimes \nabla_{c'(t)}G$$

となることを確かめるのはやさしい．また縮約に関しては，

$$\nabla_{c'(t)}(C^i_j F) = C^i_j(\nabla_{c'(t)}F)$$

であることも同様に検証はやさしい．実際，簡単のため (1,2) 次テンソル場で試してみると，

$$\nabla_{c'(t)}(C^1_1 F) = \nabla_{c'(t)}\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m F^i_{ij}(t)E^j(t)\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \frac{dF^i_{ij}}{dt}(t)\right) E^j(t)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{dF^i_{ij}}{dt}(t)\right) E^j(t) = C^1_1(\nabla_{c'(t)}F).$$

以上から，次の定理を (定義として) 述べる．

定義 3.5 (**定理**)　多様体 M とその上の線形接続 ∇ が与えられており，テンソル場全体を $\mathcal{T}(M)$ とおく．$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{T}(M)$ から $\mathcal{T}(M)$ への $\mathbf{R}$ 上の双線形写像で (同じ記号 ∇ で表す)，以下の性質 (i)–(v) を満たすものが一意的に存在する．

(i) $\nabla_{fX}F = f\nabla_X F \quad (f \in C^\infty(M),\ X \in \mathcal{X}(M),\ F \in \mathcal{T}(M))$.

(ii) 各ベクトル場 X に対して，∇_X はテンソル場のタイプを保つ．すなわち，(s,t) 次テンソル場 F に対して，$\nabla_X F$ も (s,t) 次テンソル場である．$\nabla_X F$ をベクトル場 X による F の**共変微分**という．

(iii) テンソル場 F と G のテンソル積に対して，

$$\nabla_X(F \otimes G) = \nabla_X F \otimes G + F \otimes \nabla_X G$$

が成り立つ．

(iv) 共変微分は縮約と可換である．すなわち，$\nabla_X C^i_j F = C^i_j \nabla_X F$.

(v) $X \in \mathcal{X}(M), \omega \in A^t(M)$ に対して，$\nabla_X \omega \in A^t(M)$ となり，$\eta \in A^s(M)$ に対して

$$\nabla_X(\omega \wedge \eta) = \nabla_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge \nabla_X \eta$$

が成り立つ．

▶ **例 5** (0,1) 次テンソル場，つまり 1 次微分形式 ω とベクトル場 X, Y に対して，

$$X(\omega(Y)) = \nabla_X(C_1^1(\omega\otimes Y)) = C_1^1\nabla_X(\omega\otimes Y)$$
$$= C_1^1(\nabla_X\omega\otimes Y + \omega\otimes\nabla_X Y) = (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

したがって，

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \tag{3.12}$$

となる．同様に $(0,t)$ 次テンソル場 ω とベクトル場 $X, Y_1, \ldots, Y_t$ に対して，

$$(\nabla_X\omega)(Y_1,\ldots,Y_t) = X(\omega(Y_1,\ldots,Y_t)) - \sum_{i=1}^{t}\omega(Y_1,\ldots,\nabla_X Y_i,\ldots,Y_t)$$

が成り立つ． □

▶ **例 6** 1 次微分形式 ω に対して，その外微分 $d\omega$ を線形接続 ∇ とそのねじれ率テンソル T を用いて表す．例題 3.5 と (3.12) により，ベクトル場 X, Y に対して，

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$
$$= (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) - (\nabla_Y\omega)(X) - \omega(\nabla_Y X) - \omega([X,Y])$$
$$= (\nabla_X\omega)(Y) - (\nabla_Y\omega)(X) + \omega(T(X,Y))$$
$$= 2\mathcal{A}(\nabla\omega)(X,Y) + \omega(T(X,Y)).$$

ここで $\nabla\omega(X,Y) = (\nabla_X\omega)(Y)$ とおいた．

以上から，$d\omega = 2\mathcal{A}(\nabla\omega) + C_1^1(\omega\otimes T)$ となる． □

一般に (s,t) 次テンソル場 F に対して，$(s,t+1)$ 次テンソル場 ∇F を次のように定義する:

$$\nabla F(\theta^1,\ldots,\theta^s,X,Y_1,\ldots,Y_t) = (\nabla_X F)(\theta^1,\ldots,\theta^s,Y_1,\ldots,Y_t)$$
$$(\theta^1,\ldots,\theta^s\in\mathcal{T}_1^0(M),\ X,Y_1,\ldots,Y_t\in\mathcal{X}(M)).$$

このとき，∇F を F の**共変微分**という．同様にして ∇F の共変微分 $\nabla\nabla F$，さらにそれの共変微分と高階の共変微分が定義できる．また $\nabla F = 0$ のとき，テンソル場 F を**平行である**，あるいは**平行なテンソル場**という．任意の C^∞

級曲線に対して，F はその曲線に沿う平行なテンソル場である，といっても同等である．

▶ **例 7**　C^∞ 級関数 f に対して，$\nabla f = df$ であるが，さらに ∇df を求めると，

$$\nabla df(X,Y) = (\nabla_X df)(Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \qquad (X, Y \in \mathcal{X}(M))$$

となる．よって

$$\nabla df(X,Y) - \nabla df(Y,X) = -T(X,Y)(f)$$

が成り立つ．したがって接続が対称のとき，つまりねじれ率テンソル $T=0$ のとき，(0,2) 次テンソル場 ∇df は対称である．　□

▶ **例 8**　(0,2) 次テンソル場 g に対して，その共変微分 $\nabla g \in \mathcal{T}_3^0(M)$ を計算すると，

$$\nabla g(X,Y,Z) = (\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

となる．したがって g がリーマン計量のとき，線形接続 ∇ と g が整合しているという条件はこの接続に関して g が平行であるという条件と同等である．　□

▶ **例 9**　ベクトル場 Z に対して，2 階の共変微分 $\nabla\nabla Z \in \mathcal{T}_2^1(M)$ を求める．$\nabla\nabla Z$ を $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{X}(M)$ への $C^\infty(M)$ 上の双線形写像と考えると，

$$\begin{aligned}\nabla\nabla Z(X,Y) &= \nabla_X(\nabla Z)(Y) = \nabla_X(\nabla Z(Y)) - \nabla Z(\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\nabla\nabla Z(X,Y) - \nabla\nabla Z(Y,X) = R(X,Y)Z - \nabla_{T(X,Y)}Z,$$

すなわち，

$$\mathcal{A}(\nabla\nabla Z)(X,Y) = \frac{1}{2}(R(X,Y)Z - \nabla_{T(X,Y)}Z).$$

同様に，1 次微分形式 ω とベクトル場 X, Y, Z に対して，次が成り立つ:

$$(\nabla_X(\nabla_Y\omega) - \nabla_Y(\nabla_X\omega) - \nabla_{[X,Y]}\omega)(Z) + \omega(R(X,Y)Z) = 0,$$

$$\nabla\nabla\omega(X,Y,Z) = (\nabla_X(\nabla_Y\omega) - \nabla_{\nabla_X Y}\omega)(Z),$$

$$\nabla\nabla\omega(X,Y,Z)-\nabla\nabla\omega(Y,X,Z)$$
$$=-\omega(R(X,Y)Z-\nabla_{T(X,Y)}Z)-T(X,Y)(\omega(Z)). \qquad \square$$

3.5 写像と共変微分

本節では，写像に沿うベクトル場の方向微分を定義し，その基本的性質を述べる．曲線が考察の対象であるときも，その変分のような2次元，あるいはそれより大きい次元の広がりをもつ場合を扱うときにたいへん有効である．

多様体 N から M への C^∞ 級写像 $\phi: N \to M$ が与えられているとき，N から M の接束 TM への C^∞ 級写像 ξ で，$\pi_{TM}\circ\xi=\phi$ を満たすものを**写像 $\phi: N \to M$ に沿うベクトル場**とよび，それら全体を $\mathcal{X}_\phi(N,M)$ と記す．ただし $\pi_{TM}: TM \to M$ は M の接束 TM から M への自然な射影を表す．

たとえば，N 上のベクトル場 X に対して，

$$d\phi(X)(p)=d\phi_p(X_p) \quad (\in T_{\phi(p)}M)$$

とおくことによって，$\mathcal{X}_\phi(N,M)$ の元 $d\phi(X)$ が定まる．また，M 上のベクトル場 Y に対して，

$$Y_\phi(p)=Y_{\phi(p)} \quad (\in T_{\phi(p)}M)$$

とおくことによって，$\mathcal{X}_\phi(N,M)$ の元 Y_ϕ が定まる．

さて，M 上に線形接続が与えられているとき，C^∞ 級写像 $\phi: N \to M$ に沿うベクトル場の N 上のベクトル場による共変微分が自然に定義されることを示し，いくつかの基本的性質を述べる．ϕ が M の曲線であるとき，つまり区間から M への C^∞ 級写像のときには，すでに前節で述べたものである．これを一般の写像に対して拡張する．

M 上の線形接続 ∇ に対して，C^∞ 級写像 $\phi: N \to M$ による**誘導接続**とよばれる写像

$$\begin{array}{cccc}\nabla^\phi: & \mathcal{X}(N)\times\mathcal{X}_\phi(N,M) & \to & \mathcal{X}_\phi(N,M)\\ & \Psi & & \Psi\\ & (X,\xi) & \to & {\nabla_x}^\phi\xi\end{array}$$

で，次の四つの性質 (I-1)–(I-4) を満たすものが一意的に定まる．

(I-1) $\mathbf{R}$ 上の双線形写像である．

(I-2) $\nabla^{\phi}_{fX}\xi = f\ \nabla^{\phi}_{X}\xi$.

(I-3) $\nabla^{\phi}_{X}(f\xi) = X(f)\ \xi + f\ \nabla^{\phi}_{X}\xi$.

ここで $f \in C^{\infty}(N)$, $X \in \mathcal{X}(N)$, $\xi \in \mathcal{X}_{\phi}(N, M)$ である．さらに，

(I-4) $\xi \in \mathcal{X}_{\phi}(N, M)$ に対して，N の開集合 U，M の開集合 V とその上のベクトル場 Y があって，$\phi(U) \subset V$ かつ $\xi = Y_{\phi}$ を満たすならば，任意の $X \in \mathcal{X}(N)$ に対して，

$$(\nabla^{\phi}_{X}\xi)_p = \nabla_{d\phi_p(X)}Y \qquad (p \in U)$$

が成り立つ．

実際これら四つの性質を満たす写像 ∇^{ϕ} があるとしよう．3.2 節での議論と同様に，(I-1), (I-2) と (I-3) から，N の適当な開集合上で，∇^{ϕ} がどのように表されるか確かめよう．U を N の開集合，V を M の開集合で，$\phi(U) \subset V$ を満たしているものとする．さらに U と V において局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^m)$ がそれぞれ与えられているとし，$\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^m)$ とおく．このとき，$X \in \mathcal{X}(N), \xi \in \mathcal{X}_{\phi}(N, M)$ に対して，それぞれ

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i \quad (X^i \in C^{\infty}(U)), \qquad \xi = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi^{\alpha}(F_{\alpha})_{\phi} \quad (\xi^{\alpha} \in C^{\infty}(U))$$

と一意的に表す．ここで $E_i = \partial/\partial x^i$, $F_{\alpha} = \partial/\partial y^{\alpha}$ $(i = 1, \cdots, n,\ \alpha = 1, \cdots, m)$ とおいた．このとき，(I-1), (I-2) と (I-3) からただちに

$$\nabla^{\phi}_{X}\xi = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^i}\right)(F_{\alpha})_{\phi} + X^i\xi^{\alpha}\nabla^{\phi}_{E_i}(F_{\alpha})_{\phi}$$

が導かれる．次に，(I-4) より

$$\nabla^{\phi}_{E_i}(F_{\alpha})_{\phi} = \nabla_{d\phi(E_i)}F_{\alpha}$$

となり，$d\phi(E_i) = \sum_{\beta=1}^{m}(\partial\phi^{\beta}/\partial x^i)(F_{\beta})_{\phi}$ より，

$$\nabla^{\phi}_{E_i}(F_{\alpha})_{\phi} = \sum_{\beta=1}^{m}\left(\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x^i}\right)(\nabla_{F_{\beta}}F_{\alpha})_{\phi}$$

となる．さらに，$\{\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\}$ を ∇ の局所座標系 $(y^1, \ldots, y^m)$ に関するクリストッフェルの記号とすると，

$$\nabla^{\phi}_{E_i}(F_{\alpha})_{\phi} = \sum_{\gamma=1}^{m}\left(\sum_{\beta=1}^{m}\left(\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x^i}\right)\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\circ\phi\right)(F_{\gamma})_{\phi}$$

が得られる．これから $\nabla^{\phi}_{X}\xi$ は U において，次のように表されることがわかる:

$$\nabla^{\phi}_{X}\xi = \sum_{\gamma=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} X^{i}\frac{\partial\xi^{\gamma}}{\partial x^{i}} + \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ \alpha,\beta=1,\dots,m}} X^{i}\frac{\partial\phi^{\beta}}{\partial x^{i}}\xi^{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\circ\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}\right)_{\phi}.$$

なお，上式の右辺は，局所座標系のとり方によらないことが確かめられる．したがって，逆にこれによって局所的に $\nabla^{\phi}_{X}\xi$ を定めれば，写像 $\phi: N \to M$ による誘導接続 ∇^{ϕ} が定義できる．

ここで (I-2) より，N の点 p に対して，$T_{\phi(p)}M$ の元 $(\nabla^{\phi}_{X}\xi)(p)$ は ベクトル場 X の点 p での値 $v = X_p$ で決まることに注意する．つまり v 方向の共変微分 $\nabla^{\phi}_{v}\xi$ が決まるわけである．

次に，写像の合成と誘導接続の関係について述べる．ψ を多様体 L から N への C^{∞} 級写像とする． ϕ との合成写像 $\phi\circ\psi: L \to M$ に対して，それによる誘導接続

$$\nabla^{\phi\circ\psi}:\ \mathcal{X}(L)\times\mathcal{X}_{\phi\circ\psi}(L,M) \to \mathcal{X}_{\phi\circ\psi}(L,M)$$

が定まる．Y を M 上記のベクトル場とすると，誘導接続の性質 (I-4) より，$v \in T_pL$ に対して，

$$\nabla^{\phi\circ\psi}_{v}Y_{\phi\circ\psi} = \nabla_{d(\phi\circ\psi)(v)}Y, \qquad \nabla^{\phi}_{d\psi(v)}Y_{\phi} = \nabla_{d\phi(d\psi(v))}Y,$$

そして合成写像の微分法 $d(\phi\circ\psi) = d\phi\circ d\psi$ より，

$$\nabla^{\phi\circ\psi}_{v}Y_{\phi\circ\psi} = \nabla^{\phi}_{d\psi(v)}Y_{\phi}$$

となる．さらに一般の $\xi \in \mathcal{X}_{\phi}(N,M)$ に対して，$\xi_{\psi}(p) = \xi(\psi(p))$ によって $\mathcal{X}_{\phi\circ\psi}(L,M)$ の元 ξ_{ψ} を定めれば，誘導接続の存在と一意性に関する上記の議論より，Y_{ϕ} の場合と同様に

$$\nabla^{\phi\circ\psi}_{v}\xi_{\psi} = \nabla^{\phi}_{d\psi(v)}\xi$$

となることが確かめられる．

さらにまた，次の事実も従う．詳細は読者に任せる．

命題 3.9 多様体 N から線形接続 ∇ の与えられた多様体 M への C^{∞} 級写像 $\phi: N \to M$ に対して，その誘導接続 ∇^{ϕ} は次の性質 (i)–(iii) をもつ．

(i) R を ∇ の曲率テンソルとすると，$X, Y \in \mathcal{X}(N), \xi \in \mathcal{X}_{\phi}(N,M)$ に対

して，

$$\nabla^\phi_X(\nabla^\phi_Y\xi) - \nabla^\phi_Y(\nabla^\phi_X\xi) - \nabla^\phi_{[X,Y]}\xi = R(d\phi(X), d\phi(Y))_\phi\, \xi$$

が成り立つ．

(ii) ∇ が対称ならば，N 上の任意のベクトル場 X, Y に対して，

$$\nabla^\phi_X(d\phi(Y)) - \nabla^\phi_Y(d\phi(X)) - d\phi([X,Y]) = 0$$

が成り立つ．

(iii) M 上のリーマン計量 g と ∇ が整合するとき，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{X}_\phi(N, M)$ と $X \in \mathcal{X}(N)$ に対して，

$$X(g_\phi(\xi, \eta)) = g_\phi(\nabla^\phi_X\xi, \eta) + g_\phi(\xi, \nabla^\phi_Y\eta)$$

が成り立つ．ここで $g_\phi(\xi, \eta)$ は，$g_\phi(\xi, \eta)(p) = g_{\phi(p)}(\xi(p), \eta(p))$ で定義される N 上の関数を表す．

表記について： N を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，$(x^1, \ldots, x^n)$ をその上の局所座標系とする．このとき，ベクトル場 $\partial/\partial x^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ による $\phi : N \to M$ に沿うベクトル場 ξ の共変微分 $\nabla^\phi_{\partial/\partial x^i}\xi$ を，簡単のために

$$\frac{D\xi}{\partial x^i}, \qquad \frac{D}{\partial x^i}\xi$$

などと表すことにする．混乱が生じないと思われるときには，今後よくこの記号を用いる．この記法によれば，$[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$ より

$$\frac{D}{\partial x^i}\frac{D}{\partial x^j}\xi - \frac{D}{\partial x^j}\frac{D}{\partial x^i}\xi = R\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)_\phi \xi.$$

同様に ∇ が対称であるとき，

$$\frac{D}{\partial x^i}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{D}{\partial x^j}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \tag{3.13}$$

また，リーマン計量 g と整合しているときには，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^i}g\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right)\\ &= g\left(\frac{D}{\partial x^i}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) + g\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \frac{D}{\partial x^i}d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる．

3.6 平行移動と曲率

多様体 M に線形接続 ∇ が与えられているとする．M の点 p を基点とするループ，つまり点 p からでて p にもどる閉曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で，区分的に C^∞ 級であるものを考えよう．c に沿う平行移動 $\Pi(c; a, b)$ は，T_pM からそれ自身への線形同形写像である．

ユークリッド空間において，その自明な接続 (ユークリッド計量のレビ・チビタ接続) の場合には，どのような (区分的に C^∞ 級の) ループに対しても，平行移動は恒等写像である．しかしたとえば，球面のレビ・チビタ接続のように，ループによって平行移動が異なる場合もある．平行移動は接続の曲率と深く関係している．本節では，これに関する基本的な事実を証明する．さらに 2 次元リーマン多様体を考察して，ガウス・ボンネの定理を導く．

3.6.1 曲率テンソルが自明な線形接続

まず次の定理を証明する．

定理 3.10 m 次元多様体 M とその上の線形接続 ∇ に対して M が連結であるとき，次の三つの条件 (i)–(iii) は互いに同値である．

(i) 線形接続の曲率テンソル R はいたるところ 0 である．

(ii) 二点を結ぶ二つの区分的に C^∞ 級曲線に対して，それらが両端を固定して区分的に C^∞ 級の変形可能ならば，それぞれの曲線に沿う平行移動は一致する．

(iii) M の任意の点に対して，その近傍で定義された平行なベクトル場からなる標構場が存在する．

さらに 次の二つの条件 (iv), (v) は同等である．

(iv) 線形接続のねじれ率テンソル T と曲率テンソル R はともに M 上いたるところ 0 である．

(v) M の任意の点に対して，その点の近傍で定義された局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ で，その自然なベクトル場 $\partial/\partial x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ がすべて平行である．すなわち，この座標系に関する ∇ のクリストッフェルの記号がすべて 0 であるものが存在する．

証明 M の開集合 U 上の標構場 $(E_1, \ldots, E_m)$ に対して，もし各 E_i が U 上で平行である，すなわち $\nabla E_i = 0$ ならば，曲率テンソル R は U 上消えていなければならない．実際，各 $i, j = 1, \ldots, m$ に対して，m 個の関数 $f_{ij}^k \in C^\infty(U)$ があって，$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^m f_{ij}^k E_k$ と一意的に表される．ここで，各 E_i が平行であるから，

$$\begin{aligned} R(E_i, E_j)E_k &= \nabla_{E_i}(\nabla_{E_j} E_k) - \nabla_{E_j}(\nabla_{E_i} E_k) - \nabla_{[E_i, E_j]} E_k \\ &= -\sum_{\ell=1}^m f_{ij}^\ell \nabla_{E_\ell} E_k = 0 \end{aligned}$$

となる．このように，(iii) から (i) を示すのは容易である．

同様に (v) を仮定し，$E_i = \partial/\partial x^i$ とおくと，$[E_i, E_j] = 0$ より，

$$T(E_i, E_j) = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i - [E_i, E_j] = 0$$

が導かれ，ねじれ率テンソルも消えていなければならない．このように (v) から (iv) が従う．

さて，点 p と点 q を結ぶ二つの C^∞ 曲線 c_0 および c_1 と，それらの間の両端を固定する C^∞ 級ホモトピー $H : [a, b] \times [0, 1] \to M$ が与えられているとする．H は，p と q を結ぶ曲線からなる C^∞ 級 1 径数族 $\{c_s(t) = H(t, s) \mid 0 \leqq s \leqq 1, a \leqq t \leqq b\}$ を定める．各 (t, s) に対して，$\Pi(c_s; a, t) : T_pM \to T_{c_s(t)}M$ を曲線 $c_{s|[a,t]}$ に沿う平行移動とする．T_pM の元 v を任意にとり，

$$X(t, s) = \Pi(c_s; a, t)(v) \qquad (\in T_{c_s(t)}M)$$

とおく．X は写像 H に沿うベクトル場で，

$$X(a, s) = v \quad (0 \leqq s \leqq 1), \qquad \frac{D}{\partial t} X = 0 \quad (a \leqq t \leqq b,\ 0 \leqq s \leqq 1)$$

を満たしている．とくに一番目の条件から

$$\frac{D}{\partial s} X(t = a) = 0 \qquad (0 \leqq s \leqq 1)$$

となる．さらに簡単のため $S = dH(\partial/\partial s)$，$T = dH(\partial/\partial t)$ とおくと

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} X = R(T, S)X$$

が成り立つ．ここで $R = 0$ と仮定すると，$(D/\partial s)X$ が c_s に沿って平行であり，$(D/\partial s)X$ は $t = a$ で消えているので，すべてのパラメータ t に対して消えていなければならない．すなわち $(D/\partial s)X = 0$．したがって

$$\frac{D}{\partial s} X\ (t = b) = 0 \qquad (0 \leqq s \leqq 1).$$

また $s \to X(b, s) \in T_qM$ より，これは $X(b, s)$ が s によらず一定であることを示している．したがって，$\Pi(c_0; a, b)(v) = \Pi(c_1; a, b)(v)$ が導かれた．これが T_pM の任意のベクトル v に対して成立していることから，c_0 と c_1 に沿う平行移動は一致していることが示された．

c_0 と c_1 が区分的に C^∞ 級曲線で，その間の区分的 C^∞ 級ホモトピーが存在する場合も同様に，(i) の条件のもとに c_0 と c_1 に沿う平行移動は一致していることが示される．このように (i) から (ii) が従う．

次に (ii) から (iii) を示したい．$(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ を M の座標近傍とし，簡単のため，像 $\phi(U)$ が $\mathbf{R}^m$ の原点 O を中心とした単位球体 $\mathbf{B}^m$ とする．以下 U と $\mathbf{B}^m$ を ϕ によって同一視して考える．原点 O と点 $q = (x^1(q), \ldots, x^m(q)) \in U$ を結ぶ線分 $t \to tq$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に沿う平行移動を簡単のため Π_q と記し，各接ベクトル $v \in T_{\mathrm{O}}M$ に対して，U 上のベクトル場 V を $V_q = \Pi_q(v)$ によって定める．このとき (ii) の条件より，V が平行であることが導かれる．実際，q をとおる任意の曲線 $c(s)$ $(c(0) = q)$ に対して，O と $c(s)$ を結ぶ線分と曲線 $c(s-t)$ $(0 \leqq t \leqq s)$ をつないでできる区分的に C^∞ 級の曲線は，O と $q = c(0)$ を結ぶ線分に，両端を固定して区分的に C^∞ 級変形可能である．よって，$\Pi(c; s, 0)(V_{c(s)}) = V_q$．これから

$$\nabla_{c'(0)} V = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} (\Pi(c; s, 0)(V_{c(s)}) - V_q) = 0$$

となる．このように，ベクトル場 V は平行であることが示された．そこで $T_{\mathrm{O}}M$ の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ に対して，各 e_i から上のようにして U 上のベクトル場 E_i を定めると，$(E_1, \ldots, E_m)$ は平行なベクトル場からなる U 上の標構場を与える．以上により (ii) から (iii) が示された．

最後に (iv) から (v) を示すために，1 次微分形式 ω の外微分 $d\omega$ は，線形接続 ∇ とそのねじれ率テンソル T を使って，

$$d\omega(X, Y) = (\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X) + \omega(T(X, Y))$$

と表されることに注意する (例 6 参照)．そこで U 上の標構場 $(E_1, \ldots, E_m)$ に対して，$(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ を $\omega^i(E_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) を満たす 1 次微分形式の組とする．ここで (3.12) に注意すると，各 E_i が平行よりすべての ω^i も平行である．よって，

$$d\omega^i(X, Y) = \omega^i(T(X, Y)) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

となる．ここで $T = 0$ とすると，上式より $d\omega^i = 0$，すなわち 各 ω^i は閉形式である．したがって，U 上の C^∞ 級関数 y^i があって，$\omega^i = dy^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ と表される (命題 3.6 参照)．ここで逆写像定理によれば，$(y^1, \ldots, y^m)$ は点 O の近傍上での局所座標系を与える．この座標系による自然なベクトル場 $\partial/\partial y^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ は，∇ について平行である．このように (iv) から (v) が示され，定理 3.10 の証明は完了した．■

さて，いま示した定理を反省してみる．多様体 M 上の線形接続 ∇ の曲率が恒等的に 0 と仮定する．このとき任意の点 p に対して，その点を基点とする (区分的に C^∞ 級の) ループに沿う平行移動は，そのループの属するホモトピー

類によってのみ決まり，したがって基本群 $\pi_1(M,p)$ は平行移動によって T_pM に線形同形写像として作用すること，つまり基本群から T_pM の線形同形写像全体のなす群への準同形が定義されることがわかる．したがって，もし M が単連結ならば，二点を結ぶ二つの区分的に C^∞ 級曲線に対して，それらが両端を固定して区分的に C^∞ 級の変形可能であるから，それぞれの曲線に沿う平行移動は一致し，全体で定義された平行なベクトル場からなる標構場 $(E_1,\ldots,E_m)$ がとれる．さらにねじれ率テンソルも恒等的に 0 ならば，$(E_1,\ldots,E_m)$ と双対の関係にある M 上の 1 次微分形式の組 $(\omega_1,\ldots,\omega_m)$ はすべて閉形式からなる．したがって，M の点 p を一つ固定し，各点 q に対して，p と q を結ぶ区分的に C^∞ 級の曲線 c をとり，

$$f_i(q) = \int_c \omega_i \qquad (i=1,\ldots,m)$$

と定義すると，平行移動の場合と同様にして，これは c の選び方によらないことが示され (命題 3.6 参照)，$\omega_i = df_i$ を満たす M 上の C^∞ 級関数 f_i $(i=1,\ldots,m)$ を得る．したがって，M から $\mathbf{R}^m$ への写像 $\phi=(f_1,\ldots,f_m)$ は，その定義から局所微分同相写像で，∇^0 を $\mathbf{R}^m$ の自明な接続とし，$\nabla^{0\phi}$ を写像 ϕ に沿う誘導接続とすると，∇ は

$$d\phi(\nabla_X Y) = {\nabla^{0\phi}}_X d\phi(Y) \qquad (X,Y\in\mathcal{X}(M))$$

によって与えられる．

練習問題 3.2 リー群 G において，すべての左不変ベクトル場が平行であるとして，線形接続 ∇ が定義される．以下のことを確かめよ．

(1) ∇ の曲率は恒等的に 0 であるが，そのねじれ率テンソル T は，左不変ベクトル場 X,Y に対して，$T(X,Y)=-[X,Y]$ となる．また左不変ベクトル場の積分曲線が ∇ の測地線となる．

(2) $\widetilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ $(X,Y\in\mathcal{X}_L(G))$ によって定義される線形接続 $\widetilde{\nabla}$ は対称となり，これは ∇ と同じ測地線を定める (命題 2.6，例 4，練習問題 4.1 参照)．

3.6.2 ガウス・ボンネの定理

向き付けられた 2 次元リーマン多様体 (M,g) の平行移動と曲率について考察する．点 p での接ベクトル v に対して，それを正の向きに 90 度回転した接ベクトルを $J_p(v)$ と記す．T_pM の恒等写像を I とおくと，J_p は $J_p^2=-I$

を満たす T_pM の等長変換で，$J=\{J_p \mid p\in M\}$ は M の (1,1) 次テンソル場を定義する．そこで接ベクトル v に対して $\sqrt{-1}\,v=J(v)$ とおいて，複素スカラー積を定義すると，各接平面は複素 1 次元ベクトル空間となり，ベクトル場全体も複素ベクトル空間になる．

さて g のレビ・チビタ接続 ∇ を考える．このとき，曲線に沿う平行移動と J は可換であり，J は平行である ($\nabla J=0$)．したがって開集合 U 上の TM の切断，すなわちベクトル場 E と C^∞ 級複素数値関数 f に対して，

$$\nabla_v(fE)=v(f)E+f\nabla_v E \qquad (v\in T_pM,\ p\in U)$$

が成り立つ．ここで “E は U においていたるところ 0 にはならないベクトル場である” と仮定する．このとき，U 上のすべてのベクトル場は fE の形で表され，U 上の複素数値 1 次微分形式 Γ および 2 次微分形式 Ω を，それぞれ次のように定義することができる:

$$\nabla_X E=\Gamma(X)E, \quad R(X,Y)E=\Omega(X,Y)E \qquad (X,Y\in\mathcal{X}(U)).$$

ただし R は曲率テンソルを表す．このとき R の定義と例題 3.5 から

$$\Omega=d\Gamma$$

が従う．ここで，U 内の区分的 C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ と c に沿うベクトル場 ξ に対して $\xi(t)=u(t)E_{c(t)}$ とおくと，

$$\frac{D\xi}{dt}=\left(\frac{du}{dt}+u\Gamma(c')\right)E$$

となる．よって ξ が c に沿って平行であるという条件は，区分的 C^∞ 級の複素数値関数 $u(t)$ が微分方程式

$$\frac{du}{dt}=-u\Gamma(c')$$

を満たすことであるといい換えられる．したがって ξ が平行であれば，この方程式を解いて，

$$u(t)=u(a)\exp\left(-\int_a^t \Gamma(c'(s))\,ds\right) \qquad (a\leqq t\leqq b),$$

よって

$$u(b)=u(a)\exp\left(-\int_a^b \Gamma(c'(t))\,dt\right)$$

となる．このことから，c が点 p を基点とするループのとき，c に沿う平行移動 $\Pi(c,a,b)$ は次のように与えられる:

$$\Pi(c;a,b)(v) = \left[\exp\left(-\int_c \Gamma\right)\right] v \qquad (v \in T_pM). \tag{3.15}$$

ここで Γ', Γ'' をそれぞれ Γ の実部と虚部とし，

$$\Gamma(X) = \Gamma'(X) + \sqrt{-1}\,\Gamma''(X) \qquad (X \in \mathcal{X}(M),\ \Gamma', \Gamma'' \in A^1(U))$$

と表すとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}X(g(E,E)) &= g(\nabla_X E, E)\\ &= \Gamma'(X)g(E,E) + \Gamma''(X)g(JE,E)\\ &= \Gamma'(X)g(E,E)\end{aligned}$$

より，

$$\Gamma' = \frac{1}{2} d\log\|E\|^2 \tag{3.16}$$

となる．このように Γ の実部は完全形式となり，$\Omega = \sqrt{-1}\,d\Gamma''$ となる．よって，Ω は純虚数に値をもつ U 上の 2 次閉微分形式で，

$$\Omega = -\sqrt{-1}\,K\omega_g$$

と表すことができる．ここで ω_g はリーマン計量 g の面積要素を表し，K は U 上の C^∞ 級実数値関数である．

さて，Γ は U においていたるところ 0 にならないベクトル場 E (TM の切断) を用いて定めた．しかし Ω は，じつは E のとり方にはよらない．これを確かめてみる．$\widetilde{E}$ を E と同様に U においていたるところ消えないベクトル場とすると，U 上でゼロにならない C^∞ 級複素数値関数 h があって，$\widetilde{E} = hE$ と表すことができる．したがって，Γ, Ω と同様に $\nabla\widetilde{E} = \widetilde{\Gamma}\widetilde{E}$, $\widetilde{\Omega} = d\widetilde{\Gamma}$ によって $\widetilde{\Gamma}$ および $\widetilde{\Omega}$ をそれぞれ定義すると，$\nabla\widetilde{E} = \widetilde{\Gamma}\widetilde{E} = h\widetilde{\Gamma}E$ となる．一方 $\nabla\widetilde{E} = \nabla(hE) = (dh + h\Gamma)E$ より

$$\widetilde{\Gamma} = \frac{dh}{h} + \Gamma$$

となり，したがって $\widetilde{\Omega} = \Omega$ が導かれる．このように，Ω は M 全体で定義された 2 次微分形式であり，これを g の**曲率形式**という．さらに M の向きを反対にすると，Γ は $\overline{\Gamma}$ (Γ の複素共役な 1 次微分形式)，ω_g は $-\omega_g$ にそれぞれ変

わるので，K は E のとり方，M の向きの選び方によらずに決まる．この K をリーマン計量 g の**ガウス曲率**という．

次に U に含まれる M の領域 A を考える．A の境界 ∂A は向きを込めて区分的に C^∞ 級の閉曲線 c であるとする．このとき，ストークスの定理 (定理 3.8 参照) から，

$$\int_c \Gamma = \int_{\partial A} \Gamma = \sqrt{-1}\int_{\partial A} \Gamma'' = \int_A \Omega = -\sqrt{-1}\int_A K\omega_g \tag{3.17}$$

となる．したがって (3.15) より，次の命題が導かれた．

命題 3.11 向き付けられた 2 次元リーマン多様体 (M,g) の開集合 U において，区分的に C^∞ 級のループ $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が領域 A を囲むとする．さらに U においていたるところ 0 にならないベクトル場が存在するとする．このとき，c に沿う平行移動 $\Pi(c;a,b) : T_pM \to T_pM$ $(p = c(a) = c(b))$ は次のように与えられる:

$$\Pi(c;a,b)(v) = \left[\exp\left(\sqrt{-1}\int_A K\omega_g\right)\right] v \qquad (v \in T_pM).$$

さて，M の点 p でのガウス曲率 $K(p)$ は，その定義より，単位接ベクトル v に対して，

$$K(p) = -g(R(v,J(v))v, J(v))$$

となる．次に，ガウス曲率を (M,g) の等温座標系を用いて求めてみる．

開集合 U において定義された局所座標系 (x,y) がリーマン計量 g に関する**等温座標系**であるとは，U において，

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$$

を満たすことである．(x,y) が正の座標系のとき，$\partial/\partial y = J(\partial/\partial x)$ といい換えても同様である．このとき g は，

$$g = G(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

と表示される．$E = \partial/\partial x$ とおくと，レビ・チビタ接続の対称性と $[E, JE] = [\partial/\partial x, \partial/\partial y] = 0$ より，

$$\nabla_{JE}E = \nabla_E(JE) = J(\nabla_E E),$$

すなわち $\Gamma(JE)E = \Gamma(E)JE$．したがって

$$\Gamma''(E) = -\Gamma'(JE), \qquad \Gamma''(JE) = \Gamma'(E)$$

となる．ここで (3.16) より

$$\Gamma' = \frac{1}{2} d \log G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log G}{\partial x}dx + \frac{\partial \log G}{\partial y}dy\right)$$

となる．したがって

$$\Gamma'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \log G}{\partial y}dx + \frac{\partial \log G}{\partial x}dy\right).$$

これから

$$\Omega = \sqrt{-1}\, d\Gamma'' = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \log G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log G}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy$$

となる．また，面積要素 ω_g は，$\omega_g = G dx \wedge dy$ より

$$K = -\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial^2 \log G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log G}{\partial y^2}\right)$$

となる．このように，等温座標系においてガウス曲率は表現される．

▶ **例 10**　ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の単位球面 $(\mathbf{S}^2, g_1)$ を考える．球面の北極を除いた領域上の，立体射影による局所座標系 (x, y) は等温座標系を与え，

$$g_1 = \left(\frac{2}{1 + x^2 + y^2}\right)^2 (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

と表現される (1 章の例 10 参照)．したがって，上のガウス曲率の表現公式から，単位球面のガウス曲率は恒等的に 1 であることがわかる．南極を中心にした立体射影を考えても同様である．

次に双曲平面 $(\mathbf{H}^2, g_{-1})$ を考える．これは $\mathbf{R}^2$ の単位円板 $\mathbf{B}^2$ においてポアンカレ計量

$$g_{-1} = \left(\frac{2}{1 - x^2 - y^2}\right)^2 (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

によって表される (2.2.2 項参照)．したがって，このガウス曲率は恒等的に -1 であることがわかる．なお，上半平面上のポアンカレ計量を用いても示される．

□

次に命題 3.11 にもどり，ガウス曲率の積分について考えてみる．そのために，まず単位の速さをもつ C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ に対して，測地的曲

率を定義する．$\|c'\|^2 = 1$ より，$2(\nabla_{c'}c', c') = d\|c'\|^2/dt = 0$，すなわち $\nabla_{c'}c'$ は c' に直交しているので，

$$\nabla_{c'(t)}c'(t) = -\kappa_c(t)\nu(t), \qquad \nu(t) = -J(c'(t)) \tag{3.18}$$

と表すことができる．この関数 κ_c を正規曲線 c の**測地的曲率**という．次に k 個の C^∞ 級正規曲線 $c_i(t)$ $(\ell_{i-1} \leqq t \leqq \ell_i)$ をつないでできる区分的に C^∞ 級の閉曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を考える．ただし $a = \ell_0 < \cdots < \ell_k = b$ とし，U, A, E は命題 3.11 に与えられたとおりとする．このとき，各 i に対して (3.18) が成り立ち，$c_i'(t) = f_i(t)E_{c(t)}$ とおくことによって，(3.18) を C^∞ 級複素数値関数 $f_i(t)$ に関する常微分方程式

$$f_i'(t) = -\big(\Gamma(c_i'(t)) - \sqrt{-1}\kappa_{c_i}(t)\big)f_i(t) \qquad (\ell_{i-1} \leqq t \leqq \ell_i)$$

として表現する．これを解いて，

$$f_i(t) = f_i(\ell_{i-1})\exp\left(-\int_{\ell_{i-1}}^t \Gamma(c'(s))\,ds + \sqrt{-1}\int_{\ell_{i-1}}^t \kappa_{c_i}(s)\,ds\right) \qquad (\ell_{i-1} \leqq t \leqq \ell_i).$$

ここで各 (頂) 点 $c_{i+1}(\ell_i) = c_i(\ell_i)$ において，

$$f_{i+1}(\ell_i) = f_i(\ell_i)\exp\sqrt{-1}\,\theta_i \qquad (-\pi < \theta_i \leqq \pi)$$

と表すことができることに注意する．角 θ_i は $-\pi < \theta_i \leqq \pi$ としているので，この表し方は一意的である．ただし $f_{k+1}(\ell_k) = f_1(\ell_0)$ と約束する．このとき，

$$\begin{aligned}
f_1(\ell_0) &= f_{k+1}(\ell_k)\\
&= f_k(\ell_k)\exp\sqrt{-1}\,\theta_k\\
&= f_k(\ell_{k-1})\exp\left(-\int_{\ell_{k-1}}^{\ell_k}\Gamma(c_k'(s))\,ds + \sqrt{-1}\int_{\ell_{k-1}}^{\ell_k}\kappa_{c_k}(s)\,ds + \sqrt{-1}\,\theta_k\right)\\
&= \cdots\\
&= f_1(\ell_0)\exp\sum_{i=1}^k\left(-\int_{\ell_{i-1}}^{\ell_i}\Gamma(c_i'(s))\,ds + \sqrt{-1}\int_{\ell_{i-1}}^{\ell_i}\kappa_{c_i}(s)\,ds + \sqrt{-1}\,\theta_i\right)
\end{aligned}$$

となる．これから

$$\int_c \Gamma = \sum_{i=1}^k \int_{\ell_{i-1}}^{\ell_i}\Gamma(c_i'(s))\,ds, \qquad \int_c \kappa_c\,ds = \sum_{i=1}^k\int_{\ell_{i-1}}^{\ell_i}\kappa_{c_i}(s)\,ds$$

と表すと,

$$\exp\sqrt{-1}\left(\sqrt{-1}\int_c \Gamma + \int_c \kappa_c\, ds + \sum_{i=1}^{k}\theta_i\right) = 1$$

が従う．すなわち，ある整数 n があって,

$$\sqrt{-1}\int_c \Gamma + \int_c \kappa_c\, ds + \sum_{i=1}^{k}\theta_i = 2n\pi$$

となる．よって，c が領域 A の境界 ∂A を表すとき，(3.17) より

$$\int_A K\omega_g + \int_{\partial A}\kappa_{\partial A}\, ds + \sum_{i=1}^{k}\theta_i = 2n\pi \tag{3.19}$$

が成り立つ．

さてここでユークリッド平面の多角形の場合を考えてみる．ガウス曲率と測地的曲率はともに 0 であるので，(3.19) の左辺は外角の和を表す．したがってこの場合 $n=1$ である (図 3.3).

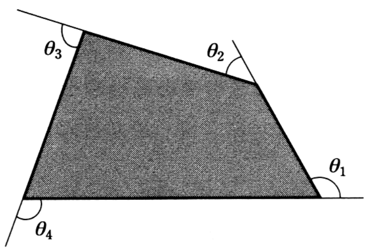


図 3.3

一般に，A が円板に微分同相な開集合 U に含まれているとき，(3.19) において $n=1$ であることがわかる．実際 (3.19) において，A を滑らかに変形させると，(3.19) の左辺は連続的に変化するので，$n=1$ であることが明らかになるように A をうまく変形することを試みる．たとえば，図 3.4 のように A を $A_1, A_2, A_3, \ldots$ と少しづつ変形し，一つの C^∞ 級曲線 γ に収束させる．このとき，(3.19) の右辺は変わらないが，ガウス曲率の積分の項は 0 に収束する．また測地的曲率は曲線の向きを反対にすると符号だけ変わることに注意して，測地的曲率の積分の項も 0 に収束する．そして明らかに外角の和の項は 2π に収束する．このようにして $n=1$ が従う (図 3.4).

以上まとめて，次の**ガウス・ボンネの定理**を得る．

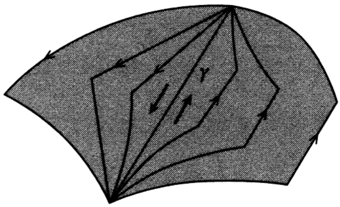


図 3.4

定理 3.12 向き付けられた 2 次元リーマン多様体 (M, g) において，区分的に C^∞ 級の一つの曲線によって表される境界 ∂A をもつ領域 A に対して，それが円板と微分同相である開集合に含まれるとき，

$$\int_A K\omega_g + \int_{\partial A} \kappa_{\partial A}\, ds + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi$$

が成り立つ．

さて A の境界 ∂A を定義する区分的 C^∞ 級閉曲線 c が，図 3.5 のように三つの測地線 c_1, c_2, c_3 をつないだものである場合を考える．

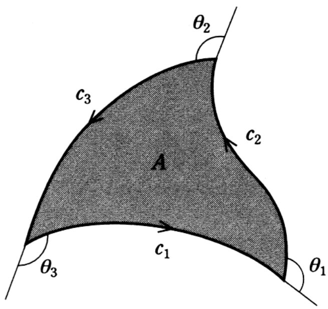


図 3.5

各頂点における外角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とする．このとき，各辺が測地線であるから，

$$2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \int_A K\omega_g, \qquad (3.20)$$

頂点の内角を $\theta_i' = \pi - \theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とおいて，(3.20) を書き換えると

$$\theta_1' + \theta_2' + \theta_3' - \pi = \int_A K\omega_g$$

となり，内角の和と π との差がガウス曲率の積分で与えられるという，ガウスによる定理が得られる．たとえば，単位球面においては，

$$\theta_1' + \theta_2' + \theta_3' - \pi = (A\ \text{の面積}) \quad (> 0),$$

そして双曲平面においては，

$$\theta_1' + \theta_2' + \theta_3' - \pi = -(A\ \text{の面積}) \quad (< 0)$$

となる．

最後に，向き付けられたコンパクト 2 次元リーマン多様体 (M, g) に対するガウス・ボンネの定理を導こう．

M の三角形分割 $M = \bigcup_k \Delta_k$ を考える．頂点，辺，面の個数をそれぞれ V, E, F とする．各面は円板に微分同相な開集合に含まれている．このとき，定理 3.12 より，

$$\int_{\Delta_k} K\omega_g + \int_{\partial\Delta_k} \kappa_{\partial\Delta_k} ds = (\Delta_k\ \text{の内角の和}) - \pi$$

となる．$k = 1, \ldots, F$ について両辺の和をとると，となり合う二つの三角形が共有する辺に沿う測地的曲率の積分は打ち消しあうので，

$$\int_M K\omega_g = 2\pi V - \pi F.$$

さらに $3F = 2E$ に注意すると，右辺は $2\pi(V - E + F)$ に等しい．よって

$$\int_M K\omega_g = 2\pi(V - E + F)$$

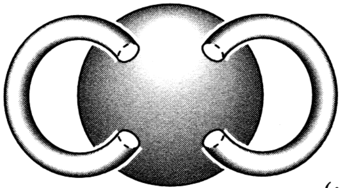
となる．ここで右辺の $V - E + F$ は曲面の三角形分割の仕方によらず決まり，その位相的性質で決まる整数である．実際，上式の左辺は三角形分割の仕方とは無関係である．この $V - E + F$ を**オイラーの標数**とよび $\chi(M)$ で表す．

以上から次の定理が示された．

定理 3.13 向き付けられたコンパクト 2 次元リーマン多様体 (M, g) に対して，

$$\int_M K\omega_g = 2\pi\chi(M)$$

が成り立つ．



(n=2)

図 3.6

これを閉曲面に対するガウス・ボンネの定理という．たとえば 2 次元球面に対して $\chi(S^2)=2$, 2 次元トーラスに対して $\chi(T^2)=0$ である．一般に，向き付け可能なコンパクト 2 次元多様体は，図 3.6 のように n 個のハンドルを球面に貼り付けてできる曲面に同相であることが知られている．この場合，そのオイラー標数は $2-2n$ に等しい (図 3.6).

練習問題 3.3 向き付けられた 2 次元リーマン多様体 (M,g) において，各点の近傍に等温座標系が存在することが知られている．一つの開集合における二つの正の等温座標系 (x,y) と (u,v) に対して，コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad \text{と}\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$$

が成り立つことを示せ．さらに $z=x+\sqrt{-1}\,y$ および $w=u+\sqrt{-1}\,v$ とおくと，この方程式は w は z に関する複素解析関数 (正則関数) であること，同様に z は w の複素解析関数であることと同値である．これを示せ．

練習問題 3.4 (1) リーマン計量 $g=E(y)dx\otimes dx+G(y)dy\otimes dy$ を考える．$G=1$ のとき $f(y)=\sqrt{E(y)}$ とおいて，さらに

$$R(y)=\exp\left(\int_s^y \frac{1}{f(t)}\,dt\right),\qquad u=R\cos x,\ v=R\sin x$$

とおく．このとき $g=(f(y)/R(y))^2(du\otimes du+dv\otimes dv)$ と表され，ガウス曲率は $K=-f''(y)/f(y)$ となることを示せ．また $G\neq 1$ のときは，$g=G(y)(E(y)G(y)^{-1}dx\otimes dx+dy\otimes dy)$ と表して，E を EG^{-1} に代えて R, u, v をそれぞれ定義して等温座標系を与えることができる．このときガウス曲率は，$K=-(EG)^{-1/2}(G^{-1/2}(E^{1/2})')'$ となる．これを示せ．

(2) $\mathbf{R}^3$ の中の回転面 $\phi(x,y)=(f(y)\cos x, f(y)\sin x, h(y))$ を考える．ただし，$f>0$ とする．

(i) $f(y)=a+b\cos y$, $h(y)=b\sin y$ のとき，ガウス曲率は $K=\cos y/b(a+b\cos y)$ となることを示せ．

(ii) $f(y)=\frac{1}{c}e^{-cy}$, $h(y)=\pm\displaystyle\int_0^y\sqrt{1-e^{-2ct}}\,dt$ のとき，ガウス曲率は $K=-c^2$ となることを示せ.

ここで a, b, c はすべて定数である．ただし (ii) の場合，曲面は $y=0$ で滑らかではないのでこの部分を除いて考えていることに注意する.

3.7 指 数 写 像

本節を含め残りの四つの節において測地線について考える．まず線形接続 ∇ の与えられた多様体 M において，測地線を用いて接空間と多様体を結ぶ有益な座標系をとることができる．本節ではこれについて説明する.

M の任意の点 p と，その点での接ベクトル v に対して，次の性質を満たす測地線 $c_v : I_v \to M$ がただ一つ存在する．c_v が定義されている区間 I_v は，0 を含み，

$$c_v(0)=p, \qquad c_v'(0)=v \tag{3.21}$$

を満たす．さらに，このような測地線 $\tilde{c} : J \to M$ すべてに対して $J \subset I_v$，すなわち I_v は J と等しいか J を含む.

この意味で，c_v を (3.21) を満たす**極大測地線**とよぶ．この定義区間の極大性から，各 $s \in I_v$ に対して $c_v'(s)=w$ とおけば，

$$c_w(t)=c_v(t+s), \qquad I_w=\{t\in\mathbf{R}\,|\,t+s\in I_v\} \tag{3.22}$$

がわかる．c_v の存在と一意性とについては，測地線の方程式 (3.9) と常微分方程式の一般論より示されるが，さらに c_v はその初期値 p と初期ベクトル v に関しても C^∞ 級微分可能である．より正確には，M の接束 TM に視点をうつして考えることにより，次のように述べられる.

命題 3.14 M の接束 TM の任意の元 v に対して，TM における v のある近傍 U と 0 を含む開区間 I があって，$U\times I$ から M への写像 $(w,t)\mapsto c_w(t)$ が定まり，これは C^∞ 級微分可能な写像である.

そこで $\overline{c}_v(t) = {c_v}'(t)$ $(t\in I_v)$ とおくと，$\overline{c}_v$ は $t=0$ で v をとおる TM の C^∞ 級曲線を定めている．$\pi_{TM} : TM \to M$ を自然な射影とすると，

$\pi_{TM}(\overline{c}_v(t)) = c_v(t)$ $(t \in I_v)$ を満たしている．$\overline{c}_v$ の $t = 0$ での接ベクトル $\overline{c}_v{}'(0) \in T_v(TM)$ を $\Gamma^\nabla(v)$ とおくと，Γ^∇ は TM 上の C^∞ 級ベクトル場を定める．これを**測地スプレイ**という．ここで (3.22) より $\overline{c}_v{}'(t) = \Gamma^\nabla(\overline{c}_v(t))$ $(t \in I_v)$ であることがわかり，これは $\overline{c}_v : I_v \to TM$ が Γ^∇ の v をとおる積分曲線であることを示している．定義区間 I_v の極大性より，$\overline{c}_v$ は Γ^∇ の極大積分曲線である．測地スプレイ Γ^∇ は TM の (局所) 1 径数変換群を定める．これを ∇ の**測地流**という．

以上を命題としてまとめておこう．

命題 3.15 多様体 M 上に線形接続 ∇ が与えられているとき，TM 上のベクトル場 Γ^∇ が存在して，Γ^∇ の積分曲線は射影 $\pi_{TM} : TM \to M$ によって M の測地線に移る．このとき，積分曲線が極大であるならば，測地線も極大である．

すべての接ベクトル v に対して極大測地線 c_v が $\mathbf{R}$ 全体で定義されているとき，すなわち $I_v = \mathbf{R}$ のとき，M は線形接続 ∇ に関して**測地的に完備**であるという．TM 上のベクトル場 Γ^∇ が完備であるといい換えてもよい．さらに，線形接続 ∇ が M 上のリーマン計量 g と整合しているとき，各正数 r に対して，$U_r(M) = \{v \in TM \mid \|v\| = r\}$ とおくと，$U_r(M)$ は TM の超曲面となり，$v \in U_r(M)$ に対して，測地線 c_v の速さは一定値 r であるので，$\overline{c}_v(t) \in U_r(M)$ となる．このように，Γ^∇ は $U_r(M)$ 上のベクトル場となり，測地的流れは $U_r(M)$ の 1 径数変換群を定める．

次に線形接続 ∇ の測地線を使って，M の任意の点に対して，その点を中心とした指数写像を定義する．まず M の点 p をとり，前項で述べた極大測地線 c_v の定義区間 I_v が $[0,1]$ を含むような接ベクトル v 全体からなる集合を $\mathcal{D}_p$ と記す．$\mathcal{D}_p$ は T_pM の原点 (零ベクトル) O を含む開集合である．また $s \in [0,1]$ に対して，$I_v \subset I_{sv}$ より "$v \in \mathcal{D}_p$ ならば $sv \in \mathcal{D}_p$ $(0 \leqq s \leqq 1)$" という性質をもつ．さらに，$s \in \mathbf{R}$ を任意に固定すると，$t \to c_v(st)$ は $t = 0$ のとき p をとおる測地線で，$(dc_v(st)/dt)(t = 0) = sv$ より

$$c_v(st) = c_{sv}(t) \qquad (st \in I_v) \tag{3.23}$$

となることに注意しておこう．

定義 3.6 $\mathcal{D}_p$ から M への C^∞ 級写像 $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ を

$$\exp_p v = c_v(1)$$

によって定める．これを点 p での線形接続 ∇ に関する**指数写像**とよぶ．

指数写像の基本的性質として，(3.23) より

$$\exp_p(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t) \qquad (t \in I_v)$$

が成り立つ．すなわち，$\exp_p$ は T_pM の原点からでる線分を M の点 p からでる測地線に移す．M が ∇ に関して測地的に完備であるとき，かつそのときに限りすべての点 p に対して $\mathcal{D}_p = T_pM$ が成り立ち，指数写像 $\exp_p$ は T_pM 全体で定義される．

一般の場合にもどって, $\exp_p$ の原点 O での微分を求めよう．ここで $T_{\mathrm{O}}(T_pM)$ と T_pM を同一視して，各 $v \in T_pM$ に対して，

$$(d\exp_p)_{\mathrm{O}}(v) = \frac{d}{dt}\exp_p(tv)(t=0) = \frac{d}{dt}\, c_v(t)(t=0) = v.$$

このように，$d\exp_p$ は原点 O において T_pM の恒等写像となる．よって，陰関数定理によって，原点 O を含む T_pM の開集合 U^* と p を含む M の開集合 U があって，U^* は $\mathcal{D}_p$ に含まれ，$\exp_p$ は U^* から U への微分同相写像を与える．ここで U^* は，$\mathcal{D}_p$ と同様に次の性質を満たすとしてよい:

$$v \in U^* \text{ ならば,} \quad tv \in U^* \quad (0 \leqq t \leqq 1).$$

このとき，$U = \exp_p U^*$ を点 p を中心とした**正規近傍**とよぶ．ここで T_pM の標構 $(e_1, \ldots, e_m)$ を一つ固定すると，正規近傍 U の点 q に対して，U^* の点 $(\exp_p)^{-1}(q)$ は一意的に

$$(\exp_p)^{-1}(q) = \sum_{i=1}^{m} x^i(q) e_i \qquad (x^i(q) \in \mathbf{R})$$

と表される．各 $i = 1, \ldots, m$ に対して，$x^i(q)$ は U 上の C^∞ 級関数で，$(x^1, \ldots, x^m)$ が U 上の局所座標系を与える．作り方より $(x^1(p), \ldots, x^m(p)) = (0, \ldots, 0)$ である．この局所座標系を ($(e_i, \ldots, e_m)$ に関する) 点 p を中心とした**測地的正規座標系**，あるいは簡単に**正規座標系**という．この局所座標系では，線分 $t \to (tx^1(q), \ldots, tx^m(q))$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ が点 p と点 q を結ぶ測地線を表し

ている．したがって，$\{\Gamma_{ij}^k\}$ をこの正規座標系に関するクリストッフェルの記号とすると，測地線の方程式 (3.9) より，

$$\sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(tx^1(q),\ldots,tx^m(q))x^i(q)x^j(q)=0 \qquad (k=1,\ldots,m)$$

が成り立つ．

とくに $t=0$ として，$x^i(q)=v^i$ とおくと，

$$\sum_{1\leqq i\leqq j\leqq m}(\Gamma_{ij}^k(\mathrm{O})+\Gamma_{ji}^k(\mathrm{O}))v^iv^j=\sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\mathrm{O})v^iv^j=0 \qquad (k=1,\ldots,m)$$

となる．これが任意の v^i に対して成り立つことより，

$$\Gamma_{ij}^k(\mathrm{O})+\Gamma_{ji}^k(\mathrm{O})=0 \qquad (i,j,k=1,\ldots,m)$$

が従う．したがって，ねじれ率テンソル T が消えているとき，正規座標系におけるクリストッフェルの記号は中心の点で 0 である．すなわち $T=0$ ならば，

$$\Gamma_{ij}^k(\mathrm{O})=0 \qquad (i,j,k=1,\ldots,m). \tag{3.24}$$

次に，指数写像 $\exp_p:\mathcal{D}_p\to M$ の原点以外での微分 $d\exp_p$ を考察する．ベクトル空間 T_pM の点 v での接空間 $T_v(T_pM)$ と $T_{\mathrm{O}}(T_pM)$，したがって T_pM 自身を移動 $\tau_{-v}:u\to -v+u$ によって同一視する．点 $v\in\mathcal{D}_p$ とその点での接ベクトル u に対して，u に接する曲線として $s\to v+su$ をとると，

$$(d\exp_p)_v(u)=\frac{d}{ds}\exp_p(v+su)(s=0).$$

これは，点 p からでる測地線のなす変分 $H(t,s)=\exp_p t(v+su)$ の変分ベクトル場 $Y(t)=dH_{(t,0)}(\partial/\partial s)$ の $t=1$ における値 (接ベクトル) である．ここで線形接続 ∇ は対称であるとする．このとき，測地線 $c_v(t)=\exp_p tv$ に沿う変分ベクトル場 Y は，次の方程式

$$\frac{D}{dt}\frac{D}{dt}Y+R(Y,c_v')c_v'=0 \tag{3.25}$$

と初期条件

$$Y(0)=0, \qquad \frac{D}{dt}Y(0)=u \tag{3.26}$$

を満たすことを次節で示す．ここで R は線形接続の曲率テンソルである．方程式 (3.25) を測地線 c_v における**ヤコビ方程式**といい，その解を c_v に沿う**ヤコビ**

場という．なお，$R=0$，すなわち曲率テンソルが消えていれば，$Y(t)=t\widetilde{u}(t)$ が初期条件 (3.26) を満たすヤコビ場である．ただし，$\widetilde{u}(t)$ は u を c_v に沿って平行移動して得られる c_v に沿う平行なベクトル場である．

▶ **例 11**　ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{m+1}$ の単位球面 $(\mathbf{S}^m, g_1)$ を考える．$\mathbf{S}^m$ の点 p での接空間 $T_p\mathbf{S}^m$ を $\{p\}^\perp=\{v\in\mathbf{R}^{m+1}\,|\,\langle v,p\rangle_0=0\}$ と同一視する．このとき，単位接ベクトル $v\in T_p\mathbf{S}^m$ に対して，

$$c_v(t)=\exp_p tv=(\cos t)\,p+(\sin t)\,v$$

と表される．よって $u\in T_p\mathbf{S}^m$ に対して，

$$\exp_p t(v+su)=\bigl(\cos(t\|v+su\|)\bigr)\,p+\bigl(\sin(t\|v+su\|)\bigr)\,\frac{v+su}{\|v+su\|}$$

となる．ここで簡単のために，u は v に直交しているとすると，この測地変分から得られるヤコビ場 Y は，

$$Y(t)=(\sin t)\,\widetilde{u}(t)$$

と表される．ここで $\widetilde{u}(t)$ は u を c_v に沿って平行移動してできる c_v に沿う平行なベクトル場である．球面 $\mathbf{S}^m$ の測地線に沿う平行移動は $\mathbf{R}^{m+1}$ のものと変わらないことに注意しておく (命題 3.4 参照)．したがって，これを (3.25) に代入して，$R(\widetilde{u}(t),c_v'(t))c'(t)=\widetilde{u}(t)$，よって $t=0$ として

$$R(u,v)v=u \qquad (u,v\in T_p\mathbf{S}^m,\ u\perp v)$$

が成り立つ．実際これと後で説明するレビ・チビタ接続の曲率テンソルの代数的性質 (4.1.1 項参照) に注意すると，$\mathbf{S}^m$ の曲率テンソルは次のように与えられることがわかる:

$$R(u,v)w=g_1(v,w)u-g_1(u,w)v \qquad (u,v,w\in T_p\mathbf{S}^m).$$

また双曲空間 $(\mathbf{H}^m, g_{-1})$ の場合もまったく同様にしてヤコビ場と曲率テンソルが求められる．初期条件 (3.26) を満たすヤコビ場 Y は，

$$Y(t)=(\sinh t)\,\widetilde{u}(t)$$

と表され，曲率テンソルは次のように与えられる:

$$R(u,v)w=-\bigl(g_{-1}(v,w)u-g_{-1}(u,w)v\bigr) \qquad (u,v,w\in T_p\mathbf{H}^m).$$

多様体上の対称な線形接続に対して，(3.24) において述べた正規座標系の性質はたいへん有用である．次節に進む前にここでまとめておこう．

命題 3.16 多様体 M に対称な線形接続 ∇ が与えられているとする．

(1) M の点 p を中心とする正規座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ に対して，$\nabla(\partial/\partial x^i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ は点 p において 0 である．

(2) M の点 p における任意の接ベクトル v に対して，p の近傍において定義されたベクトル場 V が存在して，点 p において $V_p = v$ かつ $\nabla_u V = 0$ $(\forall u \in T_pM)$ を満たす．

(3) 線形接続 ∇ はリーマン計量 g のレビ・チビタ接続とする．このとき，M の点 p における接空間 T_pM の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ に対して，p の近傍で定義された正規直交標構場 $(E_1, \ldots, E_m)$ が存在して，点 p において $(E_i)_p = e_i$ かつ $\nabla_u E_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ \forall u \in T_pM)$ を満たす．

証明 (1) これは (3.24) そのものである．(2) 点 p を中心とした正規座標系 $(x^1, \ldots, x^m)$ を使って，$v = \sum_{i=1}^{m} v^i(\partial/\partial x^i)_p$ と表すとき，$V = \sum_{i=1}^{m} v^i(\partial/\partial x^i)$ とおけばよい．(3) 各 e_i をいま述べたように p の近傍で定義されたベクトル場 V_i に拡張して，標構場 $(V_1, \ldots, V_m)$ にシュミットの直交化を適用すればよい (2.5.3 項参照)．∎

練習問題 3.5 接束 (TM, M, π_{TM}) と線形接続 ∇ を考える．$(U, (x^1, \ldots, x^m))$ を M の局所座標近傍とする．${\pi_{TM}}^{-1}(U)$ の元 v に対して，簡単のため，$x^i = x^i \circ \pi_{TM}(v)$, $v^i = dx^i(v)$ $(i = 1, \ldots, m)$ とおいて，${\pi_{TM}}^{-1}(U)$ 上の局所座標系 $(x^1, \ldots, x^m, v^1, \ldots, v^m)$ を考える．${\pi_{TM}}^{-1}(U)$ において分布 $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_v \mid v \in {\pi_{TM}}^{-1}(U)\}$ を次のように定義する:

$$\mathcal{H}_v = \left\{ w - \sum_{k,j=1}^{m} \omega_j^k(w) v^j \left(\frac{\partial}{\partial v^k} \right) \,\middle|\, w \in T_pM,\ p = \pi_{TM}(v) \right\}.$$

ただし ω_j^k $(j, k = 1, \ldots, m)$ は，∇ のクリストッフェルの記号 Γ_{ij}^k によって定義される U 上の 1 次微分形式 $\omega_j^k = \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ij}^k dx^i$ である．このとき，以下の事実を検証せよ．

(1) $\mathcal{H}_v$ は局所座標系のとり方によらずに決まり，したがって $\mathcal{H}$ は TM における C^∞ 級 m 次元分布を定める．実際，$\mathcal{H}$ は沈め込み $\pi_{TM} : TM \to M$ における水平分布となり，線形接続 ∇ の定める水平分布という (2.5 節参照)．

(2) M の C^∞ 級曲線 $c : (a, b) \to M$ に沿うベクトル場 $\xi : (a, b) \to TM$ に対して，TM での ξ の接ベクトル $[\xi(t)]'$ が $\mathcal{H}_{\xi(t)}$ に接すること，すなわち ξ が c の水

平リフトであることと，ξ が c に沿って平行であることとは同値である．これより，曲線 c 自身の接ベクトル $c'(t)$ を TM の C^∞ 級曲線と考えての接ベクトル $[c'(t)]'$ ($c''(t)$ と記すと誤解をまねく) が $\mathcal{H}_{c'(t)}$ に接していることと c が測地線であることとは同値である．

(3) ∇ が定める測地的スプレイ Γ^∇ は，TM 上の分布 $\mathcal{H}$ に接するベクトル場で，$(d\pi_{TM})_v(\Gamma^\nabla) = v$ $(v \in TM)$ を満たす．

次に，$GL(m,\mathbf{R})$ を構造群とする主束 $(F(M), M, \pi_{F(M)})$ を考える．M の点 p における接ベクトル w に対して，$c_w(0) = p$, $c'_w(0) = w$ となる C^∞ 級曲線 $c_w(t)$ を考える．標構 $\eta = (e_1, \ldots, e_m) \in F_p(M)$ に対して，$E_i(0) = e_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ となる c_w に沿う平行なベクトル場を $E_i(t)$ とし，$\overline{c}_{w,\eta}(t) = (E_1(t), \ldots, E_m(t))$ によって $F(M)$ への C^∞ 級曲線を定義する．そして $\overline{c}_{w,\eta}$ の接ベクトル $[\overline{c}_{w,\eta}(t)]'(t=0)$ $(\in T_\eta F(M))$ を $\overline{w}$ によって表す．

(4) $\overline{w}$ は上のような曲線 c_w のとり方によらずに決まり，$w \to \overline{w}$ は $d\pi_{F(M)}(\overline{w}) = w$ を満たす T_pM から $T_\eta F(M)$ の中への線形写像である．

(5) $F(M)$ の元 η において，$\overline{\mathcal{H}}_\eta = \{\overline{w} \mid w \in T_pM,\ p = \pi_{F(M)}(\eta)\}$ とおく．$\overline{\mathcal{H}} = \{\overline{\mathcal{H}}_\eta \mid \eta \in F(M)\}$ は $F(M)$ における C^∞ 級 m 次元分布を定め，さらに $\overline{\mathcal{H}}$ は $GL(m,\mathbf{R})$ の作用に関して不変である (命題 2.4 参照)．(逆にこのような $GL(m,\mathbf{R})$ の作用で不変な水平分布により線形接続が定まる．証明を試みよ)．

(6) 数ベクトル $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbf{R}^m$ に対して，$F(M)$ 上のベクトル場 $L^{(x)}$ を次のように定義する．$F(M)$ の元 $\eta = (e_1, \ldots, e_m)$ に対して $(L^{(x)})_\eta$ は T_pM $(p = \pi_{F(M)}(\eta))$ の元 $v = \sum_{i=1}^m x^i e_i$ の $\overline{\mathcal{H}}_\eta$ への水平リフトである．このとき，$L^{(x)}$ は $F(M)$ 上の $\overline{\mathcal{H}}$ に接するベクトル場を与える．さらに $(1,0,\ldots 0)$, $(0,1,0,\ldots,0), \cdots, (0,\ldots,1)$ に対応するベクトル場を $L_1, L_2, \cdots, L_m$ と表すと，$L^{(x)} = \sum_{i=1}^m x^i L_i$ となり，$\{L_1, \ldots, L_m\}$ が $\overline{\mathcal{H}}$ を定義する．

(7) 線形接続 ∇ が M のリーマン計量 g と整合するならば，正規直交枠のなす $O(m)$ 主束 $(O(M), M, \pi_{O(M)})$ において，$F(M)$ の場合と同様に $\overline{\mathcal{H}}$ が定義される．これは $O(m)$ の作用で不変な水平分布を与える．

3.8 ヤコビ場

多様体 M 上の対称な線形接続 ∇ を考える．$c : [a,b] \to M$ を測地線とし，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を $T_{c(a)}M$ の基底とする．$e_1 = c'(a)$ と選んでおく．各 $i = 1, \ldots, m$ に対して，$E_i(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を $E_i(a) = e_i$ となる c に沿う平行

なベクトル場とする．このとき $\{E_1(t),\ldots,E_m(t)\}$ は $T_{c(t)}M$ の基底をなす．したがって，c に沿うベクトル場 Y は一意的に

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{m}Y^i(t)E_i(t) \qquad (Y^i(t)\in C^\infty([a,b]))$$

と表される．同様に，各 $i=1,\ldots,m$ に対して

$$R(E_i(t),c'(t))c'(t)=\sum_{j=1}^{m}R_i^j(t)E_j(t) \qquad (R_i^j(t)\in C^\infty([a,b]))$$

と表される．ただし $R(E_1,c')c'=R(c',c')c'=0$ より，$R_1^i=0$ $(i=1,\ldots,m)$ である．このとき，Y が c に沿うヤコビ場であることと，係数 $\{Y^1(t),\ldots,Y^m(t)\}$ が次の 2 階線形常微分方程式系の解であることとは同値である:

$$\frac{d^2Y^i(t)}{dt^2}+\sum_{j=1}^{m}R_j^i(t)Y^j(t)=0 \qquad (i=1,\ldots,m).$$

よって，二つの接ベクトル u, $v\in T_{c(a)}M$ に対して，

$$Y(a)=u, \qquad \frac{DY}{dt}(a)=v,$$

すなわち，$u=\sum_{i=1}^{m}u^ie_i$，$v=\sum_{i=1}^{m}v^ie_i$ とおいて，

$$Y^i(a)=u^i, \quad \frac{dY^i}{dt}(a)=v^i \qquad (i=1,\ldots,m)$$

を満たすヤコビ場の存在と一意性が従う．このように，測地線 c に沿うヤコビ場全体は $2m$ 次元のベクトル空間をなす．

前節で述べたように，指数写像を微分することによって初期条件 (3.26) を満たすヤコビ場が得られることを示したいが，ここではより一般に次のことを証明しよう．

命題 3.17 多様体 M と対称な線形接続 ∇ を考える．$c:[a,b]\to M$ を測地線とし，$H:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ を c の C^∞ 級変分とする．H が**測地変分**，すなわち $c_s(t)=H(t,s)$ とおいて，各 s に対して c_s が測地線ならば，変分ベクトル場 $Y(t)=dH_{(t,0)}(\partial/\partial s)$ は c に沿うヤコビ場である．

逆に Y を c に沿うヤコビ場とすると，その変分ベクトル場が Y となるような，c の測地変分が存在する．さらに，∇ がリーマン計量 g のレビ・チビタ接続の場合を考える．

このとき，

$$g(Y(t),c'(t)) = g(Y(a),c'(a)) + (t-a)\ g\left(\frac{DY}{dt}(a),c'(a)\right)$$

$$(a \leqq t \leqq b) \qquad (3.27)$$

が成り立つ．もし，ヤコビ場 $Y(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が異なる二点 $t=t_1,\ t=t_2$ で c' と直交するならば，すべての t で直交し，DY/dt も c' と直交する．なお，c' と直交するヤコビ場全体は $2(m-1)$ 次元のベクトル空間をなす．

証明 一般に，変分 H に沿う二つのベクトル場

$$\overline{Y}(t,s) = dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \qquad T(t,s) = dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

を考える．まず ∇ が対称であることと，$[\partial/\partial t, \partial/\partial s] = 0$ であることから，$(D/\partial t)\overline{Y} = (D/\partial s)T$ が成り立つ ((3.13) 参照)．よって，

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\overline{Y} = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}T = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}T + R(T,\overline{Y})T$$

となる．二番目の等号は曲率テンソル R の定義による．ここで H を測地変分とする．このとき $DT/\partial t = 0$ より $(D/\partial t)^2\overline{Y} + R(\overline{Y},T)T = 0$ が成り立つ．よって $s=0$ として $(D/dt)^2\overline{Y} + R(\overline{Y},c')c' = 0$ が得られ，$\overline{Y}$ はヤコビ場となる．

逆に Y をヤコビ場とする．$\gamma(s)$ $(-\varepsilon < s < \varepsilon)$ を $\gamma(0) = c(a)$, $\gamma'(0) = Y(a)$ を満たす C^∞ 級曲線とする．さらに $E_0(s)$, $E_1(s)$ をそれぞれ $E_0(0) = c'(a)$, $E_1(0) = (DY/dt)(a)$ を満たす γ に沿う平行なベクトル場とする．そして

$$H(t,s) = \exp_{\gamma(s)}\{(t-a)(E_0(s) + sE_1(s))\} \qquad (a \leqq t \leqq b,\ -\varepsilon < s < \varepsilon)$$

とおく．このとき $H(t,s)$ は各 s に対して，$t=a$ のとき $E_0(s) + sE_1(s)$ の方向に $\gamma(s)$ を出発する測地線 $c_s(t) = H(t,s)$ からなる c の C^∞ 級変分を与える．これから得られる変分ベクトル場 $Z(t) = dH_{(t,0)}(\partial/\partial s)$ は，c に沿うヤコビ場である．さらに，次のように Y と同じ初期条件を満たす:

$$Z(a) = dH_{(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)(t=a) = \gamma'(0) = Y(a),$$

$$\begin{aligned}\frac{DZ}{dt}(a) &= \frac{D}{\partial t}dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)(t=a,\ s=0)\\ &= \frac{D}{\partial s}dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(t=a,\ s=0)\\ &= \frac{D}{ds}(E_0(s) + sE_1(s))(s=0) = E_1(0) = \frac{DY}{dt}(a).\end{aligned}$$

したがって，Z と Y は一致する．このように，H が求める c の測地変分のひとつであることが示された．

次に (3.27) を示すために，(3.13) と (3.14) そして測地線は一定の速さをもつことを使って，$g(Y(t), c'(t))$ の微分を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g(Y(t), c'(t)) &= g\left(\frac{DY}{dt}(t), c'(t)\right) \\
&= g\left(\frac{D}{\partial t}dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(s=0) \\
&= g\left(\frac{D}{\partial s}dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(s=0) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}g\left(dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(s=0) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}g\left(dH_{(0,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dH_{(0,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(s=0) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}g(E_0(s)+sE_1(s), E_0(s)+sE_1(s))(s=0) \\
&= g(E_1(s), E_0(s)+sE_1(s))(s=0) \\
&= g(E_1(0), E_0(0)) = g\left(\frac{DY}{dt}(a), c'(a)\right)
\end{aligned}$$

となる．これから (3.27) が従う．また残りの主張も (3.27) から容易に導くことができる． ∎

3.9 最短測地線

連結リーマン多様体 (M, g) を考える．d_g を M 上のリーマン距離とする．点 p を中心とする半径 r の距離球体 $\{q \in M \mid d_g(p,q) < r\}$ を $B(p,r)$ で表す．(M,g) のレビ・チビタ接続に関する測地線の方程式は，曲線の長さ (あるいはエネルギー) の第一変分から得られるオイラー・ラグランジュの方程式であった．本節ではまず指数写像をとおして，十分小さな半径をもつ距離球体を調べ，局所最短線として測地線を特徴づける．さらに距離空間としてのリーマン多様体の基本的性質を学ぶ．

連結リーマン多様体 M の点 p における指数写像 $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ を考える．以下，接空間 T_pM の元 v での接空間 $T_v(T_pM)$ を，移動 $\tau_{-v}(u) = -v + u$ $(u \in T_pM)$ をとおして，原点 O での接空間 $T_{\mathrm{O}}(T_pM)$，したがって T_pM 自身と同一視する．$\mathcal{D}_p$ の元 v と接ベクトル $u \in T_pM$ に対して，命題 3.17 の証明において $\gamma(s) = p$ $(-\varepsilon \leqq s \leqq \varepsilon)$ とおくと，$H(t,s) = \exp_p t(v+su)$ が

測地線 $c_v(t) = \exp_p tv$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の測地変分を与え，

$$Y(t) = dH_{(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = (d\exp_p)_{tv}(tu)$$

とおいて得られる変分ベクトル場 Y は，$Y(0)=0, \big(DY/dt\big)(0) = u$ を満たす c_v に沿うヤコビ場である．ここで (3.27) より，

$$g(Y(t), c_v'(t)) = tg_p(u,v) = g_p(tu, v) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

が従う．これから**ガウスの補題**として知られている基本命題が得られる．すなわち $t=1$ として，$q = \exp_p v$ とおくと，

$$g_q((d\exp_p)_v(u), (d\exp_p)_v(v)) = g_p(u,v) \qquad (u \in T_pM)$$

となり，したがって，u と v が直交しているとき，点 q での二つの接ベクトル $(d\exp_p)_v(u)$ と $c_v{}'(1) = (d\exp_p)_v(v)$ も直交している．

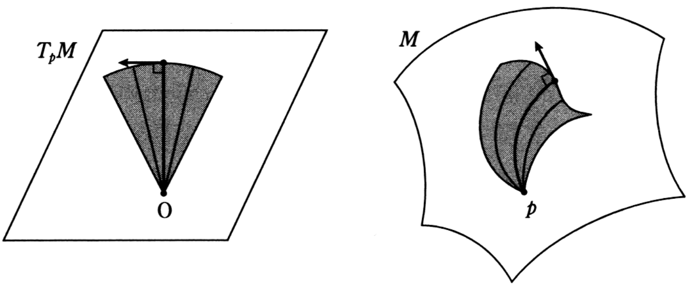


図 3.7

ここで，T_pM の原点を中心とする内積 g_p に関する半径 a の球体 (接球体) および球面 (接球面) を，それぞれ $\mathbf{B}(a)$, $\mathbf{S}(a)$ によって表す．すなわち，

$$\mathbf{B}(a) = \left\{ v \in T_pM \mid \|v\| = \sqrt{g_p(v,v)} < a \right\},$$

$$\mathbf{S}(a) = \{ v \in T_pM \mid \|v\| = a \}$$

とおく．このとき，適当な a に対して $\mathbf{B}(a) \subset \mathcal{D}_p$ となり，指数写像 $\exp_p$ が $\mathbf{B}(a)$ において定義される．さらに必要ならば a を小さくとると，$\exp_p$ は $\mathbf{B}(a)$ から p の近傍 $U_p(a)$ への微分同相写像となり，$U_p(a)$ が点 p を中心とする正規近傍を与える．区間 $(0,a)$ と単位球面 $\mathbf{S}(1)$ との直積 $(0,a) \times \mathbf{S}(1)$ から，

$U_p(a)$ から点 p を除いた開集合 $U_p(a)\setminus\{p\}$ への微分同相写像を

$$\Phi(r,v)=\exp_p rv \qquad ((r,v)\in(0,a)\times\mathbf{S}(1))$$

で定める．簡単のため，$U_p(a)\setminus\{p\}$ 上のベクトル場 $d\Phi(\partial/\partial r)$ を $\partial/\partial r$ と記す．このとき，各 b $(0<b<a)$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\exp_p bv}=(d\exp_p)_{bv}(v)$$

である．よって，ベクトル場 $(\partial/\partial r)$ は単位の長さ

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\|=\sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)}=1$$

である．さらに，各 b $(0<b<a)$ に対して $\widetilde{S}(p,b)=\exp_p\mathbf{S}(b)$ とおくと，ガウスの補題より，$\partial/\partial r$ は超曲面 $\widetilde{S}(p,b)$ と直交しており，$\widetilde{S}(p,b)$ の点 q に対して，接空間は

$$T_qM=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_q\right\}_{\mathbf{R}}\oplus T_q\widetilde{S}(p,b)$$

と (内積 g_q に関して) 直交分解される．ここで $U_p(a)$ 上の関数 r を $r(q)=\|{\exp_p}^{-1}q\|$ で定めれば，r は $U_p(a)$ 上連続で，$U_p(a)\setminus\{p\}$ において C^∞ 級関数であり，$\widetilde{S}(p,b)=\{q\in U_p(a)\mid r(q)=b\}$ となる．さらに，r の勾配ベクトル $\operatorname{grad} r$ は $(\partial/\partial r)$ と一致する．すなわち，

$$\operatorname{grad} r=\frac{\partial}{\partial r}.$$

さて，$c(t)$ $(0\leqq t\leqq b)$ を，点 p と点 $q=\exp_p bv$ を結ぶ $U_p(a)$ 内の C^∞ 級曲線とする．各 $t\neq 0$ に対して，$c(t)$ は p と異なると仮定すると，$c(t)=\exp_p r(c(t))v(t)$ と一意的に表すことができる．ここで $v(t)$ は単位接球面 $\mathbf{S}(1)$ 内の C^∞ 級曲線である．したがって前段での考察より，c の長さ $L(c)$ は $r(q)$ 以上であることが確かめられる．実際，上のような仮定がなくても，点 p, q を結ぶすべての区分的 C^∞ 級曲線 c に対して，$L(c)\geqq r(q)=b$ を示すことができる (1 章の例 12 参照)．このように，$U_p(a)$ の任意の点 q に対して，p と q の間のリーマン距離 $d_g(p,q)$ は $r(q)$ に等しく，二点 p と q を結ぶ最短線は，パラメータの変換を除いて一意的に決まり，それは測地線 $\exp_p tv$ $(0\leqq t\leqq b)$ によって与えられる．とくに a より小さい任意の正数 b に対して，

$$U_p(b) = B(p,b) = \exp_p \mathbf{B}(b), \qquad S(p,b) = \exp_p \mathbf{S}(b)$$

となる．ただし $S(p,r) = \{q \in M \mid d_g(p,q) = r\}$ とおいた．

以上を定理としてまとめておこう．

定理 3.18 連結リーマン多様体 (M,g) の任意の点 p に対して，ある正数 a が存在して，点 p を中心とした半径 a の距離球体 $B(p,a)$ は正規近傍となり，各点 $q \in B(p,a)$ に対して $q = \exp_p bv$ $(v \in \mathbf{S}(1))$ と表すと，正規測地線 $\exp_p tv$ $(0 \leqq t \leqq b)$ は，点 p と点 q を結ぶパラメータ変換を除いてただ一つの最短線である．

ここで定理 3.18 において，点 p とは異なる $B(p,a)$ の二点 q_1，q_2 に対して，これらを結ぶ最短線があるとはいえない．またあるとしても，$B(p,a)$ の中にあるとは限らない．さらに，最短線の (パラメータ変換を除いた意味での) 一意性も一般には期待できない．ただし a を十分小さくとれば，これらはすべて肯定的である (3.10 節参照)．

さて，M の区分的に C^∞ 級曲線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を考える．各径数 t に対して，$a' < t < b'$ を満たすある区間 $[a', b']$ に c を制限すると，$c_{|[a',b']}$ が $c(a')$ と $c(b')$ を結ぶ最短線であるとき，つまり

$$d_g(c(a'), c(b')) = L(c_{|[a',b']}) \qquad \left(= \int_{a'}^{b'} \sqrt{g(c'(s), c'(s))}\, ds \right)$$

となるとき，c を**局所最短線**という．局所最短線は，定理 3.18 より測地線である．とくに C^∞ 級曲線である．このことから，二点 p と q を結ぶ最短線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が存在すると仮定すると，中間の点 $p' = c(a')$ $(a < a' < b)$ に対して，$c_{|[a',b]}$ は p' と q を結ぶ (パラメータ変換を除いて) ただ一つの最短線であることが従う．つまり，点 p から 点 q への最短な径路は (存在するとして) 途中から枝分かれするようなことは決してないのである．しかし，p と q 自身を結ぶ最短な径路は一般には一つとは限らない．

以上を系としてまとめておく．

系 3.19 測地線は局所最短線である．逆に局所最短線は測地線であり，とくに C^∞ 級曲線である．

次に後で使う事実を，定理 3.18 の系として示しておく．

系 3.20　M, p, a を定理 3.18 のものとする．a より小さい正数 b と $B(p,b)$ に含まれないすべての点 q に対して，

$$d_g(p,q) = d_g(p,\widetilde{q}) + d_g(\widetilde{q},q)$$

を満たす $S(p,b)$ の点 $\widetilde{q}$ が存在する．

証明　$S(p,b)$ はコンパクトであることにより，点 q と $S(p,b)$ の距離を実現する点 $\widetilde{q}$ を選ぶことができる．すなわち $d_g(q,\widetilde{q}) = d_g(q,S(p,b))$ を満たす点 $\widetilde{q} \in S(p,b)$ をとる．このような点 $\widetilde{q}$ が求めるものである．実際，$c : [0,d] \to M$ を p と q を結ぶ区分的に C^∞ 級曲線とする．c は少なくとも一点で $S(p,b)$ と交わり，それを $c(T)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} L(c) = L(c|[0,T]) + L(c|[T,d]) &\geqq d_g(p,c(T)) + d_g(c(T),q) \\ &\geqq b + d_g(\widetilde{q},q) = d_g(p,\widetilde{q}) + d_g(\widetilde{q},q) \end{aligned}$$

となる．したがって，リーマン距離の定義から $d_g(p,q) \geqq d_g(p,\widetilde{q}) + d_g(\widetilde{q},q)$.

一方，三角不等式より，結局この両辺が等しいことがわかる．　■

定義 3.7　リーマン多様体 (M,g) の測地線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ 上の二点 $p = c(a)$, $q = c(b)$ が c に沿って**共役である**とは，$Y(a) = 0$, $Y(b) = 0$ を満たす自明でない (つまり恒等的に 0 ではない) c に沿うヤコビ場 Y が存在するときをいう．

上のようなヤコビ場 Y は，(3.27) より測地線 c に直交している．すなわち $g(Y(t), c'(t)) = 0$ $(a \leqq t \leqq b)$ を満たしていることに注意する．また，上の定義をいい換えると，

$$c(t) = \exp_p tv,\ q = \exp_p rv \qquad (v \in \mathcal{D}_p \subset T_pM)$$

とおいたとき，点 q が測地線 c に沿う点 p の**共役点**であるとは，点 rv が指数写像 $\exp_p$ の臨界点である，すなわち $(d\exp_p)_{rv}(u) = 0$ となる 0 でない接ベクトル $u \in T_pM$ $(\simeq T_{rv}(T_pM))$ が存在するときをいう．

さて，このとき次のことが成り立つ．

命題 3.21　$c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ をリーマン多様体 (M,g) の点 $p = c(a)$ から

でる測地線とする．ある $t=\tau$ $(a<\tau<b)$ において，点 p と点 $q=c(\tau)$ が c に沿って共役であるとする．このとき，c の両端 p と $\widetilde{q}=c(b)$ を結ぶ C^∞ 級曲線 $\widetilde{c}$ で，c より真に短いもの ($L(\widetilde{c})<L(c)$ となるもの) が存在する．したがって，c はその両端を結ぶ最短線ではない．

この事実は，4.7 節において命題 4.21 としてあらためて述べ，そこで証明することにする．

練習問題 3.6 二つのリーマン多様体 (M,g) と (N,h)，そして M から N への写像を考える．

(1) C^∞ 級写像 $\phi: M\to N$ に対して，次の三つの条件 (i)–(iii) は互いに同値であることを示せ．

(i) ϕ は M の任意の正規測地線を N の正規測地線に移す．すなわち M の正規測地線 $c(t)$ $(a<t<b)$ に対して，$\phi(c(t))$ は N の正規測地線である．

(ii) M の任意の点 p に対して，ある正数 a を選んで，$\|v\|<a$ となるすべての接ベクトル $v\in T_pM$ に対して，$\phi(\exp_p v)=\exp_{\phi(p)} d\phi_p(v)$ が成り立つ．

(iii) ϕ は局所等距離写像である．すなわち M の任意の点 p に対して，ある近傍 U があって $d_g(x,y)=d_h(\phi(x),\phi(y))$ $(\forall x,\ y\in U)$ が成り立つ．

さらにこれらの条件が満たされるとき，ϕ は等長はめ込み ($\phi^*h=g$) となる．これを示せ．

(2) M と N の次元が等しいとする．

(iv) C^∞ 級写像 $\phi: M\to N$ が局所等長写像であるならば，(1) の各条件を満たすことを示せ．

(v) M から N への二つの局所等長写像 ϕ と ψ に対して，M のある点 p において $\phi(p)=\psi(p)$ かつ微分 $d\phi_p$ と $d\psi_p$ が一致するならば，p を含む M の連結成分において ϕ と ψ は一致する．これを示せ．

注意 M の次元が N の次元より小さく，$\phi: M\to N$ が等長はめ込みであるとき，必ずしも (1) の各条件は成立しない．このときには，M が ϕ によってどのように N の中に入っているかが問題となる．これについては，4.4 節で考察する．なお問題 (1) において，ϕ は C^∞ 級であると仮定しているが，この滑らかさの仮定の必要性に関しては検討課題として残しておく．

練習問題 3.7 連結 m 次元リーマン多様体 (M,g) の等長変換全体のなす位相群 $\mathcal{I}(M,g)$ と，M の正規直交枠全体のなす $O(m)$ 主束 $O(M)$ を考える．M の点 p と正規直交枠 $(e_1,\ldots,e_m)$ を固定する．$\mathcal{I}(M,g)$ の各元 ϕ に対して，$\phi(p)$ での正規直

交枠 $(d\phi_p(e_1),\dots,d\phi_p(e_m))$ を対応させる $\mathcal{I}(M,g)$ から $O(M)$ への写像 I は単射連続となり，$\mathcal{I}(M,g)$ と $I(\mathcal{I}(M,g))$ $(\subset O(M))$ は同相であることを示せ (なお $\mathcal{I}(M,g)$ は離散群かあるいはリー群となることが知られている).

3.10 完備リーマン多様体

連結リーマン多様体 (M,g) に対して，そのリーマン距離 d_g が完備であるとき，すなわちリーマン距離 d_g に関する任意のコーシー列 (基本列) が多様体 M のある点に収束するとき，リーマン多様体 (M,g) は**完備** であるという．たとえば，ユークリッド空間は完備である．またコンパクトリーマン多様体は完備である．また，完備リーマン多様体の閉部分多様体はその誘導計量に関して，完備リーマン多様体となる．

本節では，リーマン多様体の大域的問題を考える上で基本となる結果や概念を学ぶ．まず完備性のための幾何的条件 (ホップ・リノーの定理) を示し，次に完備リーマン多様体の最小跡や単射半径について説明する．

3.10.1 ポップ・リノーの定理

次の補題からはじめる．

補題 3.22 連結リーマン多様体 (M,g) のある点 p において，指数写像 $\exp_p$ が接空間全体 T_pM で定義されるならば，M の任意の点 q に対して，p と q を結ぶ最短測地線が存在する．

証明 まず系 3.20 より，十分小さい正数 b と $S(p,b)$ の点 $\widetilde{q}$ があって，$d_g(p,q)=d_g(p,\widetilde{q})+d_g(\widetilde{q},q)$ を満たす．ここで $\widetilde{q}=\exp_p bv$ $(v\in\mathbf{S}(1)\subset T_pM)$ と表し，$c(t)=\exp_p tv$ とおく．仮定から，c は $\mathbf{R}$ 全体で定義された測地線である．次に，$\mathbf{R}$ の部分集合 $I=\{t\in\mathbf{R}\mid t\geqq 0,\ t+d_g(c(t),q)=d_g(p,q)\}$ を考えると，I は b を含む有界閉集合である．ここで，I の元で最大であるものを T とおこう．定義から，T は p と q の距離 $d_g(p,q)$ をこえないが，じつは $c(T)=q$，すなわち $c_{|[0,T]}$ が求める最短測地線のひとつであることがわかる．これを示すために，$T<d_g(p,q)$ と仮定して矛盾を導こう．$T<d_g(p,q)$ と仮定すると，$c(T)$ と q に対して，系 3.20 を適用して，十分小さな正数 b' と $S(c(T),b')$ の点 q' があって，$d_g(c(T),q)=d_g(c(T),q')+d_g(q',q)$ を満たす．ここで $q'=\exp_{c(T)}b'w$ とおく．三角不等式と $d_g(p,q)=T+d_g(c(T),q)$ に

注意して，次の不等式を得る:

$$\begin{aligned} d_g(p,q') &\geqq d_g(p,q) - d_g(q,q') \\ &= d_g(c(T),q) - d_g(c(T),q) + T + b' = T + b'. \end{aligned}$$

一方，二つの測地線 $c(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ と $\exp_{c(T)} sw$ $(0 \leqq s \leqq b')$ をつないでできる p と q' を結ぶ区分的に C^∞ 級である曲線 $\tilde{c}$ の長さは $T+b'$ であるから，$d_g(p,q') \leqq T+b'$. したがって，$d_g(p,q') = d_g(p,q) - d_g(q,q') = T + b'$ となる．よって，$\tilde{c}$ は p と q' を結ぶ最短曲線であることになり，$c'(T) = w$, $q' = c(T+b')$ でなければならない．これは $T + b'$ が I に含まれることを示し，T のとり方に反する．以上から $T = d_g(p,q)$ が確かめられた． ∎

さて目的の**ホップ・リノーの定理**を示そう．

定理 3.23 連結リーマン多様体 (M,g) に対して，以下の条件 (i)–(iv) はそれぞれ同値である．

(i) (M,g) は測地的完備である．すなわち，任意の点 p に対して，指数写像 $\exp_p$ は接空間 T_pM 全体で定義される．

(ii) ある点 p に対して，その指数写像 $\exp_p$ は T_pM 全体で定義される．

(iii) リーマン距離 d_g に関して，M の任意の有界閉集合はコンパクトである．

(iv) (M,g) は完備リーマン多様体である．

証明 (i) から (ii) は明らかであるから，まず (ii) から (iii) を示そう．接空間 T_pM における半径 R の球体 $\mathbf{B}(R)$ に対して，リーマン距離の定義から $\mathbf{B}(R)$ の閉包の指数写像 $\exp_p$ による像 $\exp_p \overline{\mathbf{B}(R)}$ は，点 p を中心とした半径 R の距離球体 $B(p,R)$ の閉包 $\overline{B(p,R)}$ に含まれるが，補題 3.22 より $\overline{B(p,R)}$ は $\exp_p \overline{\mathbf{B}(R)}$ に含まれる．よって任意の R に対して，$\exp_p \overline{\mathbf{B}(R)} = \overline{B(p,R)}$ が成り立つ．$\overline{\mathbf{B}(R)}$ はコンパクトであるから，$\overline{B(p,R)}$ もコンパクトである．さらに，有界な閉集合 K に対して適当な R をとって $K \subset \overline{B(p,R)}$ とできるので，K もコンパクトである．

次に，(iii) から (iv) も，コーシー列は有界であることから明らかである．

最後に (iv) から (i) を示す．$c : (a,b) \to M$ を，0 を含む開区間 (a,b) で定義された極大な正規測地線とする．$t_i < b$ で，$\lim_{i\to\infty} t_i = b$ となる列 $\{t_i\}$ をとると，c の区間 $[t_i,t_j]$ $(t_i < t_j)$ での長さは $t_j - t_i$ に等しいので，

$$d_g(c(t_i),c(t_j)) \leqq t_i - t_j.$$

したがって $b < +\infty$ とすると，$\{c(t_i)\}$ は d_g に関してコーシー列をなし，(iv) の仮定より $\{c(t_i)\}$ はある点 $q \in M$ に収束する．したがって定理 3.18 より，c は q をとお

る測地線として b をこえて定義できる．これは極大性に反し，$b=+\infty$ でなければならない．同様に $a=-\infty$ でなければならない．以上で定理は証明された． ∎

補題 3.22 と定理 3.23 をあわせて，次の結果が成り立つ．

系 3.24　完備連結リーマン多様体 (M,g) において，各点 p での指数写像 $\exp_p$ は接空間 T_pM 全体で定義され，TM から M の上への C^∞ 級写像である．さらに任意の二点に対して，それらを結ぶ最短測地線が存在する．

このように，完備であるという条件のもとに，二点を結ぶ最短線の存在問題は解決する．

3.10.2　最小跡と単射半径

以下において，完備連結リーマン多様体 (M,g) を考察する．点 p での単位接ベクトル v に対して $c_v(t)=\exp_p tv$ とおき，$c_{v|[0,s]}$ が最短線であるような正数 s の上限を $\rho(v)$ とおく．つまり

$$\rho(v)=\sup\{s>0 \mid d_g(p,c_v(s))=L(c_{v|[0,s]})=s\} \tag{3.28}$$

と定義する．このとき，$0<\rho(v)<+\infty$ または $\rho(v)=+\infty$ である．$\rho(v)<+\infty$ ならば，c_v は区間 $[0,\rho(v))$ において最短線であるが，$\rho(v)$ より大きい径数 s に対して，p と $c_v(s)$ を結ぶより短い測地線が存在することになる．いい換えると，$\rho(v)$ は $c_{v|[0,s]}$ が距離を実現する最短線となるパラメータ s の最後の値である．ここで $\rho(v)$ の基本的性質を述べよう．

定理 3.25　(M,g) を完備連結リーマン多様体とする．

(1)　M の点 p での単位接ベクトル v に対して，$\rho(v)$ が有限の値と仮定し，$q=c_v(\rho(v))$ とおく．このとき，次の (i), (ii) のいずれかが成り立つ．

(i)　q は測地線 c_v に沿う，始点 p の最初の共役点である．

(ii)　点 p での単位接ベクトル w で，$w\neq v$, $\rho(v)=\rho(w)$, $c_w(\rho(w))=q$ を満たすものが存在する．したがって，$c_{w|[0,\rho(w))}$ も p と q を結ぶ最短測地線である．

(2)　ρ を点 p での単位接球面 $\mathbf{S}(1)$ から $(0,+\infty]$ への関数とみなすとき，ρ

は連続である.

証明 まず (1) を示す．命題 3.21 と $c_{v|[0,\rho(v))}$ が最短線であることより，q が c_v に沿って共役点であるならば，最初の共役点でなければならない．このことから，区間 $[0,\rho(v)]$ において c_v に沿う共役点がないとして (ii) を示そう.

まず指数写像 $\exp_p$ は，接空間 T_pM の線分 tv $(0 \leqq t \leqq \rho(v))$ において 1 対 1 で，各 tv において局所微分同相写像である．よって測地線 $\exp_p tv$ $(0 \leqq t \leqq \rho(v))$ を含む正規近傍 U がとれる．次に $s > \rho(v)$ を満たす各 s に対して，p と $c_v(s)$ を結ぶ最短線が存在する．そのひとつを $c_{w(s)}(t) := \exp_p tw(s)$ $(w(s) \in \mathbf{S}(1) \subset T_pM)$ とする．$\ell(s) = d_g(p, c_v(s))$ とおくと，$\ell(s) < s$ で $c_{w(s)}(\ell(s)) = c_v(s)$ である．ここで単位接球面 $\mathbf{S}(1)$ がコンパクトであることに注意すると，$s_i > \rho(v)$ を満たしながら $\rho(v)$ に収束する数列 $\{s_i\}$ で，$w(s_i)$ がある単位接ベクトル w に収束するようなものがとれる．ここで $v = w$ とすると，十分大きな i に対して $c_{w(s_i)}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \ell(s_i))$ も U に含まれ，したがって，$c_{w(s_i)}(\ell(s_i)) = c_v(s_i)$ となる．これは U のとり方に反するので，$v \neq w$ となる．すなわち，$c_w(t)$ $(0 \leqq t \leqq \rho(w))$ は点 p と点 q を結ぶ c_v とは異なる最短線である．これで (ii) が示された.

さて (2) を示そう．T_pM の単位接球面 $\mathbf{S}(1)$ において，元 v とそれに収束する列 $\{v_i\}$ が与えられたとき，$\rho(v_i)$ が $\rho(v)$ に収束することを確かめたい．まず上極限 $\limsup_{i\to\infty} \rho(v_i)$ が $\rho(v)$ をこえるとすると，$\lim_{j\to\infty} \rho(v_j) > \rho(v)$ となる部分列 $\{v_j\}$ がとれる．このとき，$\rho(v) < t < \lim_{j\to\infty} \rho(v_j)$ となる各 t に対して，j が十分大きければ $t < \rho(v_j)$ となり，$d_g(p, c_{v_j}(t))$ は t に等しい．また v_j が v に収束することから，$d_g(p, c_{v_j}(t))$ は $d_g(p, c_v(t))$ に収束する．よって，$d_g(p, c_v(t)) = t$ が導かれる．$t > \rho(v)$ なのでこれは $\rho(v)$ の定義に反する．以上から $\limsup_{i\to\infty} \rho(v_i) \leqq \rho(v)$ でなければならないことが示された.

次に，下極限 $\liminf_{i\to\infty} \rho(v_i)$ が $\rho(v)$ より小さいと仮定しよう．このとき $\lim_{j\to\infty} \rho(v_j) < \rho(v)$ となる部分列を選ぶ．$q_j = c_{v_j}(\rho(v_j))$，$T = \lim_{j\to\infty} \rho(v_j)$ とおくと，q_j は $c_v(T)$ に収束する．$c_v(T)$ は c_v に沿う p の共役点ではないので，q_j も c_{v_j} に沿う共役点ではないとしてよい．(実際，無限個の j について，q_j が c_{v_j} に沿う共役点であるならば，常微分方程式の解の係数に関する連続性より，p と q_j で消える c_{v_j} に沿うヤコビ場も，p と $c_v(T)$ で消える c_v に沿うヤコビ場に収束し，$c_v(T)$ も p の共役点となるからである.) したがって，p と q_j を結ぶ c_{v_j} とは異なる最短線が存在する．そのひとつを $c_{w_j}(t) = \exp_p tw_j$ $(w_j \in \mathbf{S}(1))$ とする．必要ならばさらに部分列を選ぶことにより，w_j はある単位接ベクトル w に収束するとしてよい．このとき，(ii) の証明と同じ理由から，$w \neq v$ が従う．一方，$c_{w|[0,T]}$ と $c_{v|[T,\rho(v)]}$ をつないでできる曲線も p と q を結ぶ最短線で，よって $w = v$ でなければならない．これは $w \neq v$ に反する．以上から，$\liminf_{i\to\infty} \rho(v_i) \geqq \rho(v)$ が導かれ，結局 $\rho(v_i)$ が $\rho(v)$ に収束することが示された. ∎

完備連結リーマン多様体 (M, g) の点 p において，ρ を (3.28) において定義した単位接球面 $\mathbf{S}(1)$ から $(0, +\infty]$ への関数として，

$$U_p^* = \{tv \mid 0 \leqq t < \rho(v), v \in \mathbf{S}(1)\}$$

とおく．定理 3.25 から，$\exp_p$ は U_p^* からその像 $U_p = \exp_p U_p^*$ への微分同相写像であり，したがって，U_p は点 p の正規近傍である．実際，p の正規近傍として最大のものである．U_p^* の境界点が指数写像によって移る点の集合 $\mathcal{C}(p) = \{\exp_p(\rho(v)v) \mid v \in \mathbf{S}(1)\}$ を，点 p の**最小跡**という．点 p とその最小跡の間の距離，すなわち $\rho : \mathbf{S}(1) \to (0, +\infty]$ の最小値を，点 p での**単射半径**という．これは定理 3.18 における a としてとれる最大の値である．ここで U_p^* と T_pM が一致するときには，最小跡は空集合となり，単射半径は無限大と理解する．また，最小跡は内点をもたない M の閉集合で，M は U_p と $\mathcal{C}(p)$ の集合としての直和になる．U_p は $\mathbf{R}^m$ と同相なので，M の位相的性質は $\mathcal{C}(p)$ のそれと深く結びついていることが想像できるであろう．ただし，一般に最小跡を求めることは難しい．もっとも簡単な例として，ユークリッド空間の球面の場合，点 p の最小跡はその対蹠点 $-p$ のみからなる．また，円柱面 (シリンダー) $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ (図 3.8)，平坦トーラス $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$，実射影平面 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ の場合に考えてみられたい．このような場合でも，リーマン計量を少し変形したらどうなるであろうか?

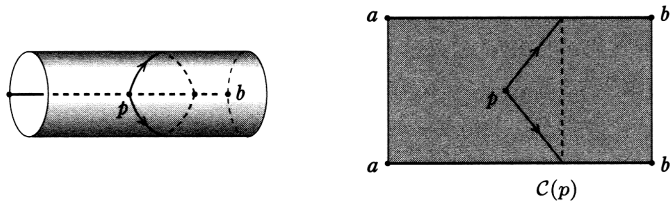


図 3.8

さて (M, g) において，$c(t)$ $(0 \leqq t < +\infty)$ を点 p から出発する正規測地線とする．すべての $T > 0$ に対して，$c_{|[0,T]}$ が p と $c(T)$ を結ぶ最短線のとき，c を**レイ**という．すなわち，$c(t) = \exp_p tv$ $(v \in \mathbf{S}(1) \subset T_pM)$ と表したとき，$\rho(v) = +\infty$ となる場合である．レイが存在するとき，M はコンパクトではな

いが，逆にコンパクトでなければ，各点から出発するレイが少なくとも一つは存在する．また，点 p からでる測地線がすべてレイとなるとき，つまり p の最小跡が空集合で，指数写像 $\exp_p : T_pM \to M$ が微分同相になっているとき，点 p を極ということもある．ユークリッド空間や双曲空間においては，すべての点が極である．実際，これらの空間ではすべての測地線の最短性は定義域 $\mathbf{R}$ 全体で成り立つ．このことは次章の 4.1 節でより一般的に考察されるであろう (定理 4.3 参照)．また図 3.9 のように，xy 座標平面の関数 $y = f(x)$ のグラフを y 軸を中心に回転して得られる回転面の場合，回転の中心 O は極となっている．それ以外の点は極とは限らない．たとえば，$f(x) = x^2$ の場合は，原点以外のすべての点は極ではない．この検証は課題として残しておく (1.6 節参照)．

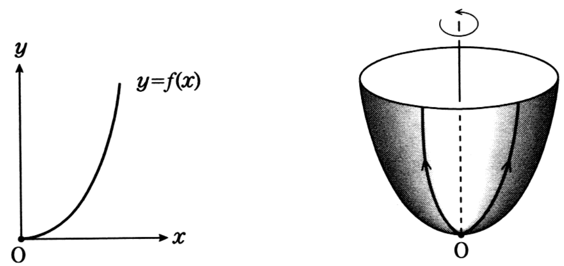


図 3.9

完備連結リーマン多様体 (M, g) において，点 p から出発するすべての測地線に対して，それらに沿う p の共役点がないとする．いい換えると，指数写像 $\exp_p : T_pM \to M$ が局所微分同相写像であるとする．M のリーマン計量 g の $\exp_p$ による引き戻し $g^* = {\exp_p}^* g$ は，T_pM 上のリーマン計量を定め，$\exp_p$ は (T_pM, g^*) から (M, g) の上への局所等長写像である．したがって，T_pM の C^∞ 級曲線 $c^*(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ に対して，M の C^∞ 級曲線 $\exp_p c^*(t)$ を $c(t)$ とおくと，c^* が g^* に関して測地線であることと c が g に関して測地線であることは同値な条件である．とくに T_pM の原点 O からでる半直線 $c_v^*(t) = tv$ $(v \in \mathbf{S}(1))$ はすべて g^* の正規測地線であり，$\exp_p$ によって g の正規測地線 $c_v(t) = \exp_p tv$ に移される．したがって定理 3.23 (1) より，(T_pM, g^*) は完備リーマン多様体で，原点 O は極になっている．さらに次のことが成り立つ．

定理 3.26　完備連結リーマン多様体 (M, g) の点 p において，それを始点とするすべての測地線に対して p の共役点がないとする．このとき，指数写像 $\exp_p : T_pM \to M$ は普遍被覆写像である．

この定理は，次の定理から従う．

定理 3.27　完備リーマン多様体 (M^*, g^*) からリーマン多様体 (M, g) の上への局所等長写像 $f : M^* \to M$ は被覆写像である．

証明　M の点 p に対して，$f(p^*) = p$ となる M^* の点 p^* を任意に一つとる．各単位接ベクトル $v^* \in T_{p^*}M^*$ に対して，df_{p^*} によって移る T_pM の単位接ベクトルを v とする．M^* の正規測地線 $c^*(t) = \exp_{p^*} tv^*$ はすべての $t \geqq 0$ に対して定義されており，c^* は f によって M の正規測地線 $c(t) = \exp_p tv$ に移る．すなわち $c(t) = f(c^*(t))$ となる．とくに c も $[0, \infty)$ 上において定義され，よって M も完備である．(3.28) で定義される T_pM の単位接球面上の関数 ρ と $T_{p^*}M^*$ の単位接球面上の関数 ρ^* を比較すると，定理 3.25 と f が局所等長写像であることから，$\rho(v) \leqq \rho^*(v^*)$ を確かめるのはやさしい．したがって，M^* の点 p^* の単射半径は，M の点 p での単射半径 i_p より大きいかまたは等しい．そこで $0 < r < i_p$ となる r をとると，$f(p^*) = p$ となるすべての p^* に対して，f は p^* を中心とする半径 r の 距離球体 $B(p^*, r)$ から，p を中心とする半径 r の距離球体 $B(p, r)$ への等長写像となる．これから f が被覆写像であることが従う．　∎

リーマン多様体の測地球体の半径とその体積，あるいはリーマン多様体自身の直径と体積は，もっとも基本的なリーマン幾何学的量である．次章に進む前に，これらについて簡単な考察をしておこう．

まず体積が 0 に収束しながら，直径が限りなく大きくなっていくリーマン多様体の列が容易に構成できる．たとえば，二つのコンパクトリーマン多様体 (M, g) と (N, h) に対して，正のパラメータ s, t によって，$M \times N$ 上にリーマン計量の族 $g_{s,t} = s^2 g + t^2 h$ を定める．M, N の次元をそれぞれ m, n とすれば，$g_{s,t}$ の体積は $s^m t^n$ の定数倍で与えられ，直径は s と t の小さいほうの定数倍で下から評価されることに注意すればよい．

一方，体積が限りなく大きくなっていくが，直径が 0 に収束していくリーマン多様体の列も容易につくることができる．たとえば，正の整数 n に対して，xy 平面を正方形 $Q(i, j) = [i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n]$ によって分割し，

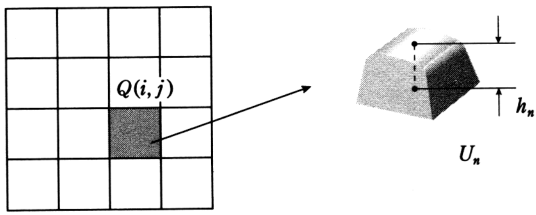


図 3.10

各 $Q(i,j)$ を，図 3.10 のように高さ h_n の直方体の底面を除いた部分を適当に丸めて得られる曲面 U_n に置き換えてできる曲面 $M_n = (\mathbf{R}^n, g_n)$ を考える．高さ h_n を適当に大きくしておく (たとえば $h_n \geqq 1/n$) と，二点間の最短経路は谷間を縫って進むであろう．ここで $h_n = 1$ とすると，$n \to \infty$ のとき，正方形 $Q = [0,1] \times [0,1]$ の部分の面積は n と同じ増大度をもつ．しかし直径は n によらずに有界である．したがって，さらに $n^{-1/4}$ 倍だけ縮小した計量 $\widetilde{g}_n$ を考えると，$n \to \infty$ のとき $(Q, \widetilde{g}_n)$ の面積は発散するが直径は 0 に収束する．

ここで g_n のリーマン距離を d_n とする．$h_n = 1$ の場合，$n \to \infty$ のとき距離の列 $\{d_n\}$ の極限は存在するであろうか？ 存在するとしたらどのような性質の距離を与えるであろうか？ 同様の問題として，$h_n = 1/n$ の場合を考える．さらに，U_n が辺の長さが $1/n$ である立方体から底面を除いたものに近づいていくようにしておく．このとき，d_n の極限は $\mathbf{R}^2$ 上のノルム $\|(x,y)\|' = |x| + |y|$ によって定義される距離に収束していくことが確かめられる．この距離に関しても，リーマン距離と同様に二点を結ぶ最短線が定義できるが，それは無数に存在することがわかる．最短線のすべての点で最短線という性質を保ちながら枝分かれしていくことができるのである．

4章 曲率

4.1 断面曲率

リーマン多様体 (M, g) のレビ・チビタ接続 ∇ の曲率テンソル R を**リーマン曲率テンソル**という．本節ではその基本的性質を述べて，断面曲率，リッチ曲率，スカラー曲率などの定義を与える．それから完備単連結定曲率空間を決定し，非正の断面曲率をもつ完備単連結リーマン多様体に関するアダマール・カルタンの定理を示す．

4.1.1 リーマン曲率テンソルの基本的性質

まず，リーマン曲率テンソルは次の性質を満たすことを示す．

(i) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

(ii) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$

(iii) $g(R(X,Y)Z,W) + g(R(X,Y)W,Z) = 0$

(iv) $g(R(X,Y)Z,W) - g(R(Z,W)X,Y) = 0$

(v) $\nabla R(X,Y,Z)W + \nabla R(Y,Z,X)W + \nabla R(Z,X,Y)W = 0$

等式 (i) は，レビ・チビタ接続 ∇ の対称性から従う．

実際，R の定義より

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y\\
&\quad=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y(\nabla_Z X)-\nabla_Z(\nabla_Y X)\\
&\qquad-\nabla_{[Y,Z]}X+\nabla_Z(\nabla_X Y)-\nabla_X(\nabla_Z Y)-\nabla_{[X,Y]}Z\\
&\quad=\nabla_X[Y,Z]+\nabla_Y[Z,X]+\nabla_Z[X,Y]-\nabla_{[Y,Z]}X-\nabla_{[Z,X]}Y-\nabla_{[Z,X]}Y\\
&\quad=[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0
\end{aligned}
$$

となる．ここで二番目と三番目の等号において ∇ の対称性を使い，最後の等号はヤコビ律にほかならない．

次に (ii) は R の定義より明らか．

(iii) の検証には，

$$g(R(X,Y)Z,Z)=0$$

を示せば十分である．これを示す．まず

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X(\nabla_Y Z),Z)&=X(g(\nabla_Y Z,Z))-g(\nabla_Y Z,\nabla_X Z)\\
&=\frac{1}{2}X(Y(g(Z,Z)))-g(\nabla_Y Z,\nabla_X Z).
\end{aligned}
$$

同様に，

$$g(\nabla_Y(\nabla_X Z),Z)=\frac{1}{2}Y(X(g(Z,Z)))-g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z)$$

となる．また

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z,Z)=\frac{1}{2}[X,Y](g(Z,Z))$$

となる．これらを

$$g(R(X,Y)Z,Z)=g(\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z,Z)$$

に代入すると，$g(R(X,Y)Z,Z)=0$ が従う．

等式 (iv) を確かめるために，(i) を使う．

$$
\begin{aligned}
&g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Z,X)Y,W)=0,\\
&g(R(Y,Z)W,X)+g(R(Z,W)Y,X)+g(R(W,Y)Z,X)=0,\\
&g(R(Z,W)X,Y)+g(R(W,X)Z,Y)+g(R(X,Z)W,Y)=0,
\end{aligned}
$$

$$g(R(W,X)Y,Z)+g(R(X,Y)W,Z)+g(R(Y,W)X,Z)=0.$$

これらの式をすべて足し合わせると，(iii) より

$$g(R(Z,X)Y,W)+g(R(W,Y)Z,X) \\ +g(R(X,Z)W,Y)+g(R(Y,W)X,Z)=0.$$

さらに (ii) と (iii) を使って，

$$2\{g(R(Z,X)Y,W)-g(R(Y,W)Z,X)\}=0$$

となり，(iv) が従う．

最後に (v) は，(i) と同様に定義にもどって直接計算することから導かれる．以上で，(i)〜(v) の検証は完了した．

等式 (i) と (v) はそれぞれ**ビアンキの第一，第二恒等式**とよばれている．

さて，M の点 p における接平面，すなわち接空間 T_pM の 2 次元部分空間 σ に対して，その**断面曲率** $K(\sigma)$ を

$$K(\sigma)=\frac{g(R(v,w)w,v)}{|v\wedge w|^2}$$

によって定義する．ここで $\{v,w\}$ は σ の一次独立なベクトルの組で，$|v\wedge w|$ は v と w が定める平行四辺形の面積

$$|v\wedge w|=\sqrt{g(v,v)g(w,w)-g(v,w)^2}$$

を表す．この断面曲率 $K(\sigma)$ の定義において，その値は上のような v と w のとり方によらないことに注意する．これはリーマン曲率テンソルの性質 (i), (ii), (iii) を使えば確かめられる．実際，まず $\{v,w\}$ を $\{w,v\}$ に代えてもその値は変らない．さらに 0 でないスカラー α に対して，$\{v,w\}$ を $\{\alpha v,w\}$ あるいは $\{v+\alpha w,w\}$ に代えても $K(\sigma)$ の値は変らない．一般に，他の一次独立な σ のベクトルの組 $\{v',w'\}$ に代えてもその値は変らない．

以下の議論において，$K(\sigma)$ の代わりに $K(v,w)$ と記すこともある．なお，2 次元リーマン多様体 M の場合，断面曲率は M 上の関数 $p\in M\to K(T_pM)$ であり，3.6.2 項のようにガウス曲率とよぶ．

さて一般に，リーマン曲率テンソル自身が次のように表されることに注意しよう (検証は読者に任せる):

$$
\begin{aligned}
g(R(x,y)z,w) = \frac{1}{6}\{&K(x+w,y+z)|(x+w)\wedge(y+z)|^2 \\
&-K(y+w,x+z)|(y+w)\wedge(x+z)|^2 \\
&-K(x,y+z)|x\wedge(y+z)|^2 - K(y,x+w)|y\wedge(x+w)|^2 \\
&-K(z,x+w)|z\wedge(x+w)|^2 - K(w,y+z)|w\wedge(y+z)|^2 \\
&+K(x,y+w)|x\wedge(y+w)|^2 + K(y,z+x)|y\wedge(z+x)|^2 \\
&+K(z,y+w)|z\wedge(y+w)|^2 + K(w,x+z)|w\wedge(x+z)|^2 \\
&+K(x,z)|x\wedge z|^2 + K(y,w)|y\wedge w|^2 \\
&-K(x,w)|x\wedge w|^2 - K(y,z)|y\wedge z|^2\}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

ここで一次独立でないベクトルの組 $\{x,y\}$ に対しては，$K(x,\ y)|x\wedge y|^2 = 0$ と理解している．

以上から次の基本的事実が導かれる．

定理 4.1 M の点 p において，ある数 $k=k(p)$ があって，任意の接平面 $\sigma\subset T_pM$ に対してその断面曲率 $K(\sigma)$ が k に等しいとき，かつそのときに限り

$$R(x,y)z = k\{g(y,z)x - g(x,z)y\} \qquad (\forall x,y,z\in T_pM)$$

が成り立つ．さらに M の次元が 3 以上で，すべての点においてこの条件が満たされるとき，k は点によらずに一定である．

証明 前半の主張は (4.1) から，後半の結果はビアンキの第二恒等式から従う． ∎

ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^m, g_0)$ と $\mathbf{R}^{m+1}$ の単位球面 $(\mathbf{S}^m, g_1)$，そして双曲空間 $(\mathbf{H}^m, g_{-1})$ の断面曲率はそれぞれ一定値 0, 1, −1 で，リーマン曲率テンソルは次で与えられる (3 章の例 11 参照):

$$R(x,y)z = k\{g_k(y,z)x - g_k(x,z)y\} \qquad (k=0,1,-1).$$

さらに，それぞれのリーマン計量を定数 k^{-2} 倍 $(k\neq 0)$ して得られるリーマン多様体 $(\mathbf{R}^m, k^{-2}g_0)$, $(\mathbf{S}^m, k^{-2}g_1)$, $(\mathbf{H}^m, k^{-2}g_{-1})$ の断面曲率はそれぞれ $0, |k|, -|k|$ である．ここで，$(\mathbf{R}^m, k^{-2}g_0)$ は，相似変換 $v\to |k|^{-1}v$ をによっ

て $(\mathbf{R}^m, g_0)$ と等長であり，$(\mathbf{S}^m, k^{-2}g_1)$ $(k>0)$ は，ユークリッド空間の半径 k^{-1} の球面 $\mathbf{S}^m(k^{-1})$ に等長的である．さらに，$(\mathbf{H}^m, k^{-2}g_{-1})$ $(k<0)$ も $\mathbf{R}^{m+1}$ の超曲面 $\{p\in\mathbf{R}^{m+1}\mid Q_{1,m}(p,p)=k, p^0>0\}$ に二次形式 $Q_{1,m}$ から得られるリーマン計量をもつリーマン多様体 (2.2 節参照) に等長的である．これらを総称して定曲率 k の**単連結空間形**といい，$\mathbf{M}_k$ と記す．

一般に，断面曲率が点にも接平面にもよらず一定値であるリーマン多様体を**定曲率空間**という．このような空間は局所的には完全に決まってしまう．実際，(M,g) を断面曲率が定数 k の定曲率空間とする．まず定理 3.18 を思い出そう．M の点 p において，適当な半径 a の距離球体 $B(p,a)$ は p の正規近傍となり，各点 $q\in B(p,a)$ に対して，$q=\exp_p bv$ $(v\in T_pM,\ \|v\|=1)$ とおくと，正規測地線 $c_v(t)=\exp_p tv$ $(0\leqq t\leqq b)$ は点 p と点 q を結ぶ (パラメータ変換を除いて決まる) ただ一つの最短線である．v に直交する T_pM の元 u に対して，$Y(t)$ $(0\leqq t\leqq b)$ を初期条件 $Y(0)=0$，$(DY/dt)(0)=u$ を満たす c_v に沿うヤコビ場とする．定理 4.1 より，Y は $D^2Y/dt^2+kY=0$ を満たす．ここで $\widetilde{u}(t)$ を $\widetilde{u}(0)=u$ を満たす c_v に沿って平行なベクトル場とすると，

$$Y(t)=f_k(t)\widetilde{u}(t)$$

となる．ただし f_k は $f_k''(t)+kf_k(t)=0$, $f_k(0)=0$, $f_k'(0)=1$ の解である．すなわち，

$$f_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}\,t & (k>0)\\ t & (k=0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{-k}}\sinh\sqrt{-k}\,t & (k<0).\end{cases}$$

実際，$f_k(t)\widetilde{u}(t)$ も Y と同じ初期条件と方程式を満たすので一致しなければならない．これから

$$g(Y(t),Y(t))=f_k^2(t)g_p(u,u)\qquad(0\leqq t\leqq b)$$

が従う．ここで $Y(t)=(d\exp_p)_{tv}(tu)$ と表すと，

$$({\exp_p}^*g)_{tv}(tu,tu)=f_k^2(t)g_p(u,u),$$

すなわち，接空間 T_pM の半径 a の球体 $\mathbf{B}^m(a)$ において，${\exp_p}^*g$ は

$${\exp_p}^*g=dt\otimes dt+f_k(t)^2g_1$$

と表すことができる．ただし，g_1 は単位接球面 $\mathbf{S}^{m-1}$ のリーマン計量である．このように定曲率空間 (M,g) は局所的にはすべて等長である．

さらに (M,g) は完備であるとする．このとき $k \leqq 0$ ならば，$f_k(t) > 0$ $(0 < t < \infty)$ であるから，指数写像は普遍被覆写像となり，$\exp_p{}^*g$ は T_pM 全体で上のように表現される．したがって，$(T_pM, \exp_p{}^*g)$ は $\mathbf{M}_k$ に等長である．

また $k > 0$ の場合にも，球面 $\mathbf{M}_k$ から (M,g) への普遍被覆写像を指数写像をとおして定めることができる．実際，簡単のため $k=1$ とし，単位球面 $\mathbf{S}^m$ の点 p' と M の点 p をとり，それぞれの接空間 $T_{p'}\mathbf{S}^m$ と T_pM の間の線形等長写像 ι を選ぶ．p' の対蹠点 $-p'$ を $\mathbf{S}^m$ から除いた領域 $\mathbf{S}^m \setminus \{-p'\}$ から M の中への写像を，それぞれの指数写像を使って $f = \exp_p \circ \iota \circ \exp_{p'}{}^{-1}$ によって定義すると，上の考察において $a = \pi$ とおいた場合を考えることになり，f は局所等長写像である．次に $q' \neq p'$，$q' \neq -p'$ となる点 q' を選び，$q = f(q')$ とおく．接空間 $T_{q'}\mathbf{S}^m$ から T_qM への線形等長写像として $df_{q'}$ をとり，$f' = \exp_q \circ df_{q'} \circ \exp_{q'}{}^{-1}$ によって $\mathbf{S}^m \setminus \{-q'\}$ から M の中への写像 f' を定義する．f' も局所等長写像で，その定義から，$\mathbf{S}^m \setminus \{-p', -q'\}$ において f と一致する (練習問題 3.6 (2) 参照)．これは，f が $\mathbf{S}^m$ 全体から M への局所等長写像へ拡張できることを示している．$\mathbf{S}^m$ はコンパクトであることより，f は全射となり，f は普遍被覆写像である．

以上より次の定理を得る．

定理 4.2 定曲率 k をもつ定曲率空間 (M,g) が完備ならば，その普遍被覆空間は単連結空間形 $\mathbf{M}_k$ に等長である．

4.1.2 非正断面曲率のリーマン多様体

一般のリーマン多様体にもどり，次の**アダマール・カルタンの定理**を証明する．

定理 4.3 リーマン多様体 (M,g) において，任意の点におけるすべての接平面に対して，その断面曲率が 0 または負とする．

(1) 任意の点とそれを始点とするすべての測地線に沿って共役点は存在しない．

(2) (M,g) が完備であるならば，任意の点 p における指数写像 $\exp_p : T_pM \to M$ は普遍被覆写像である．とくに M が単連結であれば，指数写像は微分同相写像である．

証明 点 p を始点とする正規測地線 $c(t)$ $(0 \leqq t \leqq a)$ とそれに沿うヤコビ場 $Y(t)$ に対して，$g(Y(t),Y(t))$ の 2 次の微分を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}g(Y(t),Y(t)) &= g\left(\frac{DY}{dt},\frac{DY}{dt}\right)+g\left(\frac{D^2Y}{dt^2},Y\right)\\ &= g\left(\frac{DY}{dt},\frac{DY}{dt}\right)+g\left(-R(Y,c')c',Y\right)\\ &= g\left(\frac{DY}{dt},\frac{DY}{dt}\right)-K(c',Y)|c'\wedge Y|^2\end{aligned}$$

となる．したがって，条件 $K(c',Y) \leqq 0$ より

$$\frac{d^2}{dt^2}g(Y(t),Y(t)) \geqq 2g\left(\frac{DY}{dt},\frac{DY}{dt}\right) \geqq 0.$$

これは関数 $g(Y(t),Y(t))$ が変数 t に対して，凸関数であることを示している．ここで $Y(0)=0$ とすると，Y が自明でない限りにおいて，$[0,a]$ において，$g(Y(t),Y(t))$ が単調増大，したがって $g(Y(t),Y(t))>0$ となる．これから c に沿って p と共役な点が存在しないことがわかる．さらに定理 3.26 から (2) の主張が従う． ∎

定理 4.3 から，断面曲率がいたるところ 0 または負の値をとる完備リーマン多様体 (M,g) において，二点 p と q を結ぶ測地線 $c_0(t)$, $c_1(t)$ $(0 \leqq t \leqq a)$ が，両端を固定してホモトープならば一致しなければならないことになる．実際，$c_i(t)=\exp_p tv_i$ $(v_i \in T_pM,\ i=0,1)$ とおくと，線分 tv_i $(i=0,1)$ はそれぞれ普遍被覆写像 $\exp_p : T_pM \to M$ への c_i のリフトである．よって，c_0 と c_1 が両端を固定してホモトープならば，リフトの両端も一致しなければならない (命題 2.5 参照)．すなわち $v_0=v_1$．さらに M が単連結であれば，任意の二点を結ぶ正規測地線はただ一つ存在して最短線である．

またこの定理において，各点 p での指数写像は，

$$\|(d\exp_p)_v(w)\| \geqq \|w\| \qquad (\forall v \in T_pM,\ \forall w \in T_v(T_pM)\ (\simeq T_pM))$$

を満たすことを示すことができる (定理 4.15 参照)．とくに M が単連結の場合を考えると，M はユークリッド空間 (T_pM, g_p) と比べてより大きく広がっているといえよう．

定理 4.3 は 0 または負の断面曲率をもつ完備リーマン多様体を調べるうえで基本となる結果である．断面曲率が一定の符号をもつ場合，空間のある種の単調性，凸性が示唆され，さまざまな深い結果が得られている．また，断面曲率の値域が，ある与えられた範囲内にある場合もよく研究されている．

さて次節にはいる前に，リーマン多様体 $M=(M,g)$ のリッチテンソル，リッチ曲率を定義する．まずリーマン曲率テンソル R を一度縮約して得られる (0,2) 次テンソル場 C_1^1R を，**リッチテンソル**とよび，Ric と記す．すなわち点 p での接ベクトル x,y に対して，$\mathrm{Ric}(x,y)$ は T_pM の線形写像 $z\to R(z,x)y$ のトレースを表す．Ric は 4.1.1 項で述べたリーマン曲率テンソルの性質 (i)(ビアンキの第一恒等式) と (iii) より，対称なテンソルであることがわかる．さらに単位接ベクトル v に対して，$\mathrm{Ric}(v,v)$ を v 方向の**リッチ曲率**という．ここで $\{e_1,\ldots,e_m\}$ を $e_1=v$ である T_pM の正規直交基底とすると，リッチ曲率 $\mathrm{Ric}(v,v)$ は

$$\mathrm{Ric}(v,v)=\sum_{i=2}^{m}K(v,e_i)$$

として与えられる (例題 1.8 参照)．リッチ曲率は M の単位接球面束 $U(M)$ 上の C^∞ 級関数とみなすことができ，断面曲率に比べてそれから得られる情報は少ない．4.6 節と 4.8 節において，リッチ曲率に関する基本的な結果を学ぶ．またリッチテンソルのトレースとして定義される M 上の C^∞ 級関数を**スカラー曲率**とよぶが，これについては本書では定義を述べるにとどめる．

練習問題 4.1　リー群 G と左不変計量 g を考える．g は両側不変であると仮定する．このとき次の (1)–(3) が成り立つことを示せ．

(1)　∇ を g のレビ・チビタ接続とすると，左不変ベクトル場 X, Y $(\in\mathcal{X}_L(G))$ に対して，$\nabla_XY=\frac{1}{2}[X,Y]$ となる．

(2)　左不変ベクトル場 X, Y, Z に対して，$g([X,Y],Z)+g(Y,[X,Z])=0$ となる．

(3)　左不変ベクトル場 X, Y, Z, W に対して，g のリーマン曲率テンソルは，

$$R(X,Y)Z=-\frac{1}{4}[[X,Y],Z],\qquad g(R(X,Y)Z,W)=-\frac{1}{4}g([X,Y],[Z,W])$$

によって与えられる．とくに断面曲率は

$$K(X,Y)=\frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2\Big/\sqrt{\|X\|^2\|Y\|^2-g(X,Y)^2}$$

となり，正または 0 である $(K(X,Y)=0\Leftrightarrow[X,Y]=0)$．

(ヒント：(1)　命題 2.6 が示すように，左不変ベクトル場の積分曲線は ∇ の測地線で

あるから，$\nabla_X X$, $\nabla_Y Y$, $\nabla_{(X+Y)}(X+Y)$ はすべて消えている．これと ∇ のねじれ率テンソルが消えていることに注意する．(2) $g(Y,Z)$ は定数より，$X(g(Y,Z))=0$ である．一方，$X(g(Y,Z))=\frac{1}{2}(g([X,Y],Z)+g(Y,[X,Z]))$ となる．)

練習問題 4.2 整数 $n>1$ に対して，リー群

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ {}^t x & yI\end{pmatrix}\in GL(n,\mathbf{R}) \;\middle|\; x=(x^1,\ldots,x^{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1},\ y>0\right\}$$

を考える．ただし，I は $(n-1)$ 次単位行列を表す．$\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ を $\mathbf{R}^{n-1}$ の標準基底として，$E_i=\begin{pmatrix}0 & 0\\ {}^t e_i & 0\end{pmatrix}$ $(i=1,\ldots,n-1)$，そして $E_n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ とおく．$\{E_1,\ldots,E_n\}$ は G のリー環の基底を与え，$[E_i,E_j]=0$ $(i,j=1,\ldots,n-1)$, $[E_n,E_j]=E_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$ を満たす．このとき，$\{E_1,\ldots,E_n\}$ が正規直交基底となる G の左不変計量 g とそのレビ・チビタ接続 ∇ を考える．

(1) $\nabla_{E_i}E_j=\delta_{ij}E_n$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ), $\nabla_{E_i}E_n=-E_i$, $\nabla_{E_n}E_i=0$ $(i,j=1,\ldots,n-1)$ となることを示せ．

(2) G と n 次元上半空間 $\mathbf{R}^n_+=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}^{n-1}, y>0\}$ とを同一視して，g を座標系 $(x^1,\ldots,x^{n-1},y)$ を用いて表し，g の断面曲率を求めよ (問題 2.3 参照).

4.2 写像の 2 次微分

(M,g), $(\overline{M},\overline{g})$ を二つのリーマン多様体とし，∇, $\overline{\nabla}$ をそれぞれのレビ・チビタ接続とする．M から $\overline{M}$ への C^∞ 級写像 $\phi: M\to\overline{M}$ に対して，

$$\overline{\nabla}^\phi:\ \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}_\phi(M,\overline{M})\to\mathcal{X}_\phi(M,\overline{M})$$

を 3.5 節で導入した写像 ϕ による誘導接続とする．M 上の二つのベクトル場 X, Y に対して，$\overline{\nabla}^\phi_X d\phi(Y)$ と $d\phi(\nabla_X Y)$ はともに ϕ に沿うベクトル場を与えるが，この二つのベクトル場の差を $Dd\phi(X,Y)$ と記す．すなわち

$$Dd\phi(X,Y)=\overline{\nabla}^\phi_X d\phi(Y)-d\phi(\nabla_X Y)\qquad(\in\mathcal{X}_\phi(M,\overline{M}))$$

と定義する．本節と次節において，$\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{X}_\phi(M,\overline{M})$ への写像 $Dd\phi$ の基本的性質を学ぶ．

まず，定義から明らかに，$Dd\phi(X,Y)$ は，X, Y について $\mathbf{R}$ 上双線形であり，レビ・チビタ接続の対称性から，X, Y について対称であることが容易に

確かめられる．さらに，M 上の C^∞ 級関数 f に対して

$$\begin{aligned} Dd\phi(fX,Y) &= \overline{\nabla}^{\phi}_{fX} d\phi(Y) - d\phi(\nabla_{fX}Y) \\ &= f\overline{\nabla}^{\phi}_{X} d\phi(Y) - f d\phi(\nabla_X Y) = fDd\phi(X,Y). \end{aligned}$$

また，対称性から

$$Dd\phi(X, fY) = f\, Dd\phi(X,Y)$$

となる．したがって，$Dd\phi(X,Y)$ の M の点 p での値 $Dd\phi(X,Y)_p$ $(\in T_{\phi(p)}\overline{M})$ は，X, Y のそれぞれの点 p での値 $u = X_p$, $v = Y_p$ $(\in T_pM)$ のみによって決まり，$T_pM \times T_pM$ から $T_{\phi(p)}\overline{M}$ への対称な双線形写像 $(u,v) \to Dd\phi(u,v)$ が定義される．さらに T_pM の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を一組とり，

$$\tau(\phi)_p = \sum_{i=1}^{m} Dd\phi(e_i, e_i)$$

とおいて，$T_{\phi(p)}\overline{M}$ の元を得る．これは正規直交基底の選び方によらない．したがって，ϕ に沿うベクトル場 $p \to \tau(\phi)_p$ が定まる．これを写像 ϕ の**テンション場**とよぶ．

次に局所座標系を使って，$Dd\phi$ と $\tau(\phi)$ を表してみよう．$(U, (x^1, \ldots, x^m))$ と $(V, (y^1, \ldots, y^n))$ を M, $\overline{M}$ それぞれの座標近傍とする．$\phi(U) \subset V$ と仮定し，$\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ と表す．$\{\Gamma^k_{ij}\}$ と $\{\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\}$ をそれぞれレビ・チビタ接続 ∇ と $\overline{\nabla}$ のクリストッフェルの記号とする．このとき定義に従って計算すると，次のようになる:

$$\begin{aligned} &Dd\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\phi) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)_\phi , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(\phi) &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} Dd\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha=1,\ldots,n \\ i,j=1,\ldots,m}} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\phi) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)_\phi . \end{aligned}$$

ここで，$(U, (x^1, \ldots, x^m))$ を点 p を中心とする測地的正規座標系，$(V, (y^1, \ldots, y^n))$ を $q = f(p)$ を中心とする測地的正規座標系とすると，点 p と点 q にお

いてそれぞれのクリストッフェル記号は消えているので，

$$Dd\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(p) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_q,$$

$$\tau(\phi)(p) = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial {x^i}^2}(p)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_q$$

となる．このことに注意すると，次の合成写像に関する 2 次微分の連鎖律の検証がやさしくなる．

命題 4.4　リーマン多様体 M から $\overline{M}$ への C^∞ 級写像 $\phi: M \to \overline{M}$ とリーマン多様体 $\overline{M}$ から $\widetilde{M}$ への C^∞ 級写像 $\psi: \overline{M} \to \widetilde{M}$ の合成写像 $\psi \circ \phi$ に対して，

$$Dd(\psi\circ\phi)(X,Y) = Dd\psi(d\phi(X), d\phi(Y)) + d\psi(Dd\phi(X,Y)) \qquad (X, Y \in \mathcal{X}(M))$$

が成り立つ．

以下，リーマン多様体 (M, g) 上の C^∞ 級関数 f を考えよう． この場合，$T_x\mathbf{R}$ $(x \in \mathbf{R})$ と $\mathbf{R}$ を自然に同一視する．したがって，Ddf は ∇df にほかならない．実際，

$$\begin{aligned} Ddf(X,Y) &= X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f \\ &= (\nabla_X df)(Y) = \nabla df(X,Y) \qquad (X, Y \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned}$$

この (0,2) 次対称テンソル場 ∇df を関数 f の**ヘッシアン**という．また，f のテンション場は M 上の C^∞ 級関数を定め，これを f の**ラプラシアン**とよび，Δf で表す．f の勾配場 $\mathrm{grad}\, f$ を用いて，ヘッシアンとラプラシアンを表すと，

$$\nabla df(X,Y) = X(g(\mathrm{grad}\, f, Y)) - g(\mathrm{grad}\, f, \nabla_X Y) = g(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y),$$

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$$

となる．一般に，ベクトル場 X の発散 $\mathrm{div}\, X$ は，$(0,1)$ 次テンソル場 ∇X の縮約 $C_1^1(\nabla X)$ と一致する．すなわち，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を点 p の正規直交基底とすると，

$$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

(たとえば，点 p を中心とする測地的正規座標系を使えば，これを検証するのはやさしい．) さらに，ω をリーマン計量 g に関して X と双対の関係にある 1 次微分形式，すなわち $\omega^\sharp = X$ となる 1 次微分形式 (3.3.2 項参照) とすると，

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{m} \nabla\omega(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \tag{4.2}$$

となる．とくに $X = \operatorname{grad} f$ とすれば，

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{m} \nabla df(e_i, e_i) = \Delta f$$

である．一般に，1 次微分形式 ω に対して，その発散 $\operatorname{div}\omega$ を (4.2) によって定義する．

さて，命題 4.4 の特別の場合であるが，合成関数のヘッシアンとラプラシアンについてまとめておく．

命題 4.5 (1) リーマン多様体 (M, g) 上の C^∞ 級関数 f と，f の値域を含むある開区間 I 上の C^∞ 級関数 $h(t)$ $(t \in I)$ に対して，f と h の合成関数 $h(f(x))$ $(x \in M)$ のヘッシアンとラプラシアンは，それぞれ次のように与えられる:

$$\nabla d(h(f)) = h''(f)\, df \otimes df + h'(f)\, \nabla df,$$
$$\Delta(h(f)) = h''(f)\|\operatorname{grad} f\|^2 + h'(f)\, \Delta f.$$

(2) リーマン多様体 (M, g) から $(\overline{M}, \overline{g})$ への C^∞ 級写像 $\phi : M \to \overline{M}$ と $\overline{M}$ 上の C^∞ 級関数 h に対して，合成関数 $h \circ \phi$ のヘッシアンとラプラシアンは次のように与えられる:

$$\nabla d(h \circ \phi) = \overline{\nabla} dh(d\phi, d\phi) + dh(Dd\phi),$$
$$\Delta(h \circ \phi) = \operatorname{trace}_g(\overline{\nabla} dh(d\phi, d\phi)) + dh(\tau(\phi)).$$

▶ **例 1** ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ において，$(x^1, \ldots, x^m)$ を直交座標系とする．1 次関数 $f(x) = b_1 x^1 + \cdots + b_m x^m + c$ (b_i, c はすべて定数) のヘッシアンは恒等的に消える，すなわち $\nabla df = 0$ であり，逆にこのような関数は 1 次関数に限る．また点 $p = (p^1, \ldots, p^m)$ への (ユークリッド) 距離 $r(x) = \sqrt{(x^1 - p^1)^2 + \cdots + (x^m - p^m)^2}$ とその平方 r^2 に対して，それぞれのヘッシ

アンとラプラシアンは次のようになる:

$$\nabla dr = \frac{1}{r}(g_0 - dr \otimes dr); \quad \Delta r = \frac{m-1}{r},$$
$$\nabla dr^2 = 2g_0; \quad \Delta r^2 = 2m.$$

ただし ∇dr, Δr の場合は点 p で微分可能ではないので，この点を除いたところで考えている. □

リーマン多様体 (M,g) の C^∞ 級関数 f のヘッシアン ∇df が各点において半正定値のとき**凸関数**とよび，正定値のとき**強凸関数**とよぶ．一般に，C^∞ 級関数 f を測地線 $c(t)$ $(a<t<b)$ に制限すると，$\nabla_{c'}c' = 0$ より，

$$\frac{d^2 f(c(t))}{dt^2} = \nabla df(c'(t), c'(t)) \qquad (a<t<b)$$

が成り立つ．よって f が (強) 凸関数であることと，かってな測地線に f を制限して得られる (区間上の) 関数が (強) 凸関数であることとは同値である.

命題 4.6　完備リーマン多様体 (M,g) において強凸関数 f が存在すると仮定し，さらに f の臨界点のなす集合 Σ が空集合ではないとする．このとき Σ はただ一点 p からなり，f は p において最小値をとる．さらに，M は $\mathbf{R}^m$ に微分同相である.

証明　Σ の任意の点 p から出発するすべての正規測地線 $c(t)$ $(t \geqq 0)$ に対して，

$$f(c(t))'(t=0) = df_p(c'(0)) = 0, \qquad f(c(t))'' = \nabla df(c'(t), c'(t)) > 0$$

より，$f(c(t))' > 0$ $(t>0)$ となり，$f(c(t))$ は単調増加関数である．したがって，Σ は一点 p のみからなり，f は p において最小値 a をとることがわかる．このように，f の等高面 $L(b) = \{q \in M \mid f(q) = b\}$ $(b>a)$ はすべて M の滑らかな超曲面となる.

ここで，各 $L(b)$ はコンパクトであることを背理法を使って示そう．ある $L(b)$ がコンパクトではない，つまり有界ではないとする．$\{q_i\}$ を $L(b)$ の点列で，$i \to \infty$ のとき，$d_i = d_g(p, q_i)$ は発散するとする．各 q_i に対して，p と q_i を結ぶ最短測地線 $c_i(t)$ $(0 \leqq t \leqq d_i)$ を選ぶ．$f(c_i(0)) = f(p) = a\,(<b)$, $f(c_i(d_i)) = f(q_i) = b$ より，$f(c_i(t)) \leqq b$ $(0 \leqq t \leqq d_i)$ であることに注意する．ここで，各接ベクトル $v_i = c_i'(0)$ は点 p における単位接球面の点列をなし，単位接球面はコンパクトであることより，ある単位接ベクトル v_∞ に収束する部分列 v_j が存在する．$c_\infty(t) = \exp_p tv_\infty$ とおくと，任意の区間 $[0,d]$ において，十分大きい番号の最短測地線 c_j は c_∞ に一様に収束する．したがって，c_∞ はレイであることが従う．さらに $f(c_\infty(t)) \leqq b$ $(t>0)$ より，$f(c_\infty(t))$

は無限半区間 $[0,\infty)$ において有界な関数である．ところが $f(c_\infty(t))$ は $[0,\infty)$ において単調に増加する凸関数であるから，有界ではありえない．矛盾である．このように，各 $L(b)$ はコンパクトであることが確かめられた．

次に，$M\setminus\{p\}$ 上のベクトル場 $X=\operatorname{grad} f/\|\operatorname{grad} f\|^2$ を考える．点 q をとおる X の積分曲線を $c_q(t)$ とすると，$(f(c_q(t)))'=g(\operatorname{grad} f, X_{c_q(t)})=1$ より $f(c_q(t))=f(q)+t$ となる．とくに $t\to a-f(q)$ のとき，$c_q(t)$ は点 p に収束する．そこで b を一つ固定して，$M\setminus\{p\}$ から $(a,\infty)\times L(b)$ への写像を $\phi(q)=(f(q),c_q(b-f(q)))$ によって定義する．このとき，ϕ は微分同相写像である．ここで，点 p を中心とする正規座標近傍 $(U,(x^1,\dots,x^m))$ を考えると，点 p での f のヘッシアンは

$$\nabla df_p=\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)dx^i\otimes dx^j$$

となり，f が強凸関数より，これは正定値対称二次形式である．よって，十分 a に近い b に対して $L(b)$ は U に含まれ，$(m-1)$ 次元球面と微分同相である．実際，必要あれば適当に座標変換することによって，点 p の近傍で

$$f(x^1,\dots,x^m)=f(p)+\sum_{i=1}^m (x^i)^2$$

と表すことができることが知られている．これから M は $\mathbf{R}^m$ と微分同相であることがわかる． ∎

注意 m 次元多様体 M 上の C^∞ 級関数 f を考える．点 p は f の臨界点である，すなわち $df_p=0$ とする．$(x^1,\dots,x^m)$ を p の近傍で定義された局所座標系とする．T_pM 上の対称双線形形式 $\sum_{i,j=1}^m(\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j)(p)dx^i\otimes dx^j$ が非退化である，すなわち，m 次対称行列 (ヘッセ行列) $\big((\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j)(p)\big)$ が正則であるとき，点 p を f の非退化な臨界点といい，そのヘッセ行列の負の固有値の数 λ を臨界点 p での f の指数という．指数は臨界点のまわりの局所座標系のとり方によらずに決まる．さらに必要ならば局所座標系を適当にとり直すことによって，

$$f(x^1,\dots,x^m)=f(p)-(x^1)^2-\cdots-(x^\lambda)^2+(x^{\lambda+1})^2+\cdots+(x^m)^2$$

と表すことができる．これはモースの補題としてよく知られている基本的な事実である．

4.3 リーマン部分多様体とガウスの方程式

等長はめ込みの 2 次微分は第二基本形式とよばれ，リーマン部分多様体を考えるとき基本となるものである．本節では，第二基本形式，シェイプ作用素，平均曲率ベクトルなど部分多様体に関する基本的な事柄を説明した後，リーマン

部分多様体のリーマン曲率という内部量と第二基本形式を結びつけるガウスの方程式を示す.

4.3.1 第二基本形式と平均曲率ベクトル

m 次元多様体 M から n 次元リーマン多様体 $(\overline{M}, \overline{g})$ へのはめ込み写像 $\phi : M \to \overline{M}$ を考える. 各点 $p \in M$ に対して, 点 $\phi(p)$ における $\overline{M}$ の接空間 $T_{\phi(p)}\overline{M}$ の部分空間 $d\phi(T_pM)$ の直交補空間を N_pM と記し, $T_{\phi(p)}\overline{M}$ を直交分解する:

$$T_{\phi(p)}\overline{M} = d\phi(T_pM) + N_pM \qquad (p \in M).$$

この分解に応じて, ϕ に沿うベクトル場 $\xi \in \mathcal{X}_\phi(M, \overline{M})$ を

$$\xi = \xi^T + \xi^N$$

と表す. とくに $\xi^T = 0$ のとき, ξ を ϕ に沿う M の**法ベクトル場**とよび, それら全体を $\mathcal{X}_\phi^\perp(M, \overline{M})$ と記すことにする.

次に, M 上の二つのベクトル場 X, Y に対して,

$$d\phi(\nabla_X Y) = \left(\overline{\nabla}^\phi_X d\phi(Y)\right)^T \tag{4.3}$$

によって, M 上のベクトル場 $\nabla_X Y$ を定める. ここで $\overline{\nabla}^\phi$ は $\overline{g}$ のレビ・チビタ接続 $\overline{\nabla}$ の ϕ による誘導接続を表す. この対応 $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ が M の線形接続を定めることをみるのはやさしい. 実際, 次のことが成り立つ.

命題 4.7 (4.3) によって定めた M 上の線形接続 ∇ は, はめ込み $\phi : M \to \overline{M}$ による誘導計量 $g = \phi^*\overline{g}$ のレビ・チビタ接続である. (したがって, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して, $Dd\phi(X, Y) = (\overline{\nabla}^\phi_X d\phi(Y))^N$ となり, $Dd\phi(X, Y)$ は ϕ に沿う M の法ベクトル場を定める.)

証明 M 上の線形接続 ∇ の対称性と誘導計量との整合性は, それぞれ命題 3.9 の (2) と (3) から従う. 実際, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して, ∇ の定義に従って,

$$\begin{aligned}
&d\phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\
&\quad = \left(\overline{\nabla}^\phi_X d\phi(Y)\right)^T - \left(\overline{\nabla}^\phi_Y d\phi(X)\right)^T - d\phi([X, Y]) \\
&\quad = \left(\overline{\nabla}^\phi_X d\phi(Y) - \overline{\nabla}^\phi_Y d\phi(X) - d\phi([X, Y])\right)^T \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

最後の等号は命題 3.9 (2) による．したがって，

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$$

となり，∇ は対称である．次に，$X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$ に対して，

$$\begin{aligned}
Z(g(X,Y)) &= Z(\overline{g}(d\phi(X),d\phi(Y)))\\
&= \overline{g}(\overline{\nabla}^{\phi}_Z d\phi(X),d\phi(Y))+\overline{g}(d\phi(X),\overline{\nabla}^{\phi}_Z d\phi(Y))\\
&= \overline{g}((\overline{\nabla}^{\phi}_Z d\phi(X))^T,d\phi(Y))+\overline{g}(d\phi(X),(\overline{\nabla}^{\phi}_Z d\phi(Y))^T)\\
&= \overline{g}(d\phi(\nabla_Z X),d\phi(Y))+\overline{g}(d\phi(X),d\phi(\nabla_Z Y))\\
&= g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla_Z Y)
\end{aligned}$$

となる．ここで二番目の等号は命題 3.9 (3) による． ∎

定義 4.1 等長はめ込み $\phi:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ に対して，その 2 次微分

$$Dd\phi:\ T_pM\times T_pM\to N_pM \qquad (p\in M)$$

を ϕ の (点 p での) **第二基本形式**とよび，$Dd\phi(u,v)$ $(u,\,v\in T_pM)$ の代わりに $\mathcal{A}_p(u,v)$ と記す．また N_pM のベクトル ν に対して，T_pM からそれ自身への線形変換 $\mathcal{S}_\nu$ を

$$g(\mathcal{S}_\nu(u),v)=-\overline{g}(\mathcal{A}_p(u,v),\nu) \qquad (u,v\in T_pM)$$

によって定める．これを法ベクトル ν に関する ϕ の**シェイプ作用素**とよぶ．

シェイプ作用素 $\mathcal{S}_\nu:T_pM\to T_pM$ は (g に関して) 対称な線形変換である．すなわち，$g(\mathcal{S}_\nu(u),v)=g(u,\mathcal{S}_\nu(v))$ $(u,v\in T_pM)$ が成り立つ．

さらに，M の法ベクトル $\nu\in N_pM$ に対して，$\mathcal{S}_\nu$ を次のように定義してもよい:

$$\overline{\nabla}^{\phi}_v\overline{\nu}=d\phi(\mathcal{S}_\nu(v))+\overline{\nabla}^{\perp}_v\overline{\nu} \qquad (v\in T_pM).$$

ここで $\overline{\nu}$ は，点 p で ν と一致する p の近傍で定義された法ベクトル場を表し，$\overline{\nabla}^{\phi}_v\overline{\nu}$ の N_pM 成分を $\overline{\nabla}^{\perp}_v\overline{\nu}$ と記した．$\mathcal{S}_\nu(v)$ 自身は，$\overline{\nu}$ の点 p での値 $\nu\in N_pM$ のみによって決まり，ν の拡張の仕方にはよらない．

定義 4.2 等長はめ込み $\phi:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ に対して，点 p での**平均曲率ベクトル** $\mathcal{H}_p$ を

$$\mathcal{H}_p=\sum_{i=1}^{m}\mathcal{A}_p(e_i,e_i) \quad (\in N_pM)$$

によって定める．ここで $\{e_1,\ldots,e_m\}$ は T_pM の正規直交基底である．$\mathcal{H}_p$ の値はこのような基底のとり方に依存しない．(前節では写像のテンション場とよんだものである．) このとき，各法ベクトル $\nu\in N_pM$ に対して，

$$\overline{g}(\mathcal{H}_p,\nu)=-\mathrm{trace}\ \mathcal{S}_\nu$$

が成り立つ．

なお，M が $\overline{M}$ の (埋め込まれた) 部分多様体のときは，T_pM と包含写像 $\iota : M\to\overline{M}$ による像 $d\iota(T_pM)$ を同一視して考え，部分多様体 M の第二基本形式 $\mathcal{A}$，平均曲率ベクトル $\mathcal{H}$ が定まる．一般のはめ込みにおいても，局所的には部分多様体である (なお $(\overline{M},\overline{g})$ がユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n,g_0)$ の場合，古典的文献においては，$g=\phi^*g_0=\langle d\phi,d\phi\rangle_0$ をはめ込み $\phi : M\to\mathbf{R}^n$ の第一基本形式とよんでいる)．

例題 4.8 リーマン多様体 $(\overline{M},\overline{g})$ 上の C^∞ 級関数 f と定数 a に対して，$M=\{p\in\overline{M}\mid f(p)=a\}$ とおき，M の各点 p において，$\mathrm{grad}\,f\,(p)\neq 0$ とする．このとき超曲面 M の第二基本形式 $\mathcal{A}$ および単位法ベクトル場 $\nu=\mathrm{grad}\,f/\|\mathrm{grad} f\|$ に関するシェイプ作用素 $\mathcal{S}_\nu$，平均曲率ベクトル $\mathcal{H}$ は，それぞれ次のように与えられる:

$$\mathcal{A}(u,v)=-\frac{\overline{\nabla}df(u,v)}{\|\mathrm{grad}\,f\|}\,\nu(p)\qquad(u,v\in T_pM),$$

$$\mathcal{S}_\nu(u)=\frac{1}{\|\mathrm{grad}\,f\|}(\overline{\nabla}_u\mathrm{grad}\,f-g_p(\overline{\nabla}_u\mathrm{grad}\,f,\nu)\nu(p))\qquad(u\in T_pM),$$

$$\mathcal{H}_p=-\frac{1}{\|\mathrm{grad}\,f\|}\left(\Delta f-\frac{\overline{\nabla}df(\mathrm{grad}\,f,\mathrm{grad}\,f)}{\|\mathrm{grad}\,f\|^2}\right)\nu(p).$$

証明 定義に従って計算すると，

$$\begin{aligned}\overline{g}(\mathcal{S}_\nu(u),v)&=\overline{g}(\overline{\nabla}_u\nu,v)=\overline{g}\left(\overline{\nabla}_u\left(\frac{\mathrm{grad}\,f}{\|\mathrm{grad}\,f\|}\right),v\right)\\&=\overline{g}\left(\frac{1}{\|\mathrm{grad}\,f\|}\overline{\nabla}_u\mathrm{grad}\,f,v\right)=\frac{1}{\|\mathrm{grad}\,f\|}\overline{g}(\overline{\nabla}_u\mathrm{grad}\,f,v)\\&=\frac{\overline{\nabla}df(u,v)}{\|\mathrm{grad}\,\mathrm{f}\|}\end{aligned}$$

となる．ここで三番目の等号は，$\mathrm{grad}\,f$ と v が直交していることによる． ∎

例題 4.9 リーマン多様体 $(\overline{M}, \overline{g})$ の二つの超曲面 M_1 と M_2 が一点 p で接しているとする．すなわち，$p \in M_1 \cap M_2, T_pM_1 = T_pM_2$ とする．点 p での単位法ベクトル ν に関する M_1 と M_2 それぞれのシェイプ作用素を $\mathcal{S}_\nu^{(1)}$, $\mathcal{S}_\nu^{(2)}$ とする．M_1 が点 p の近傍 U を二つの連結開集合 U^+ と U^- に分けているとし，ν は U^+ の方向を指しているとする．

(1) $M_2 \cap U$ が $U^- \cup M_1$ に含まれているならば，$\mathcal{S}_\nu^{(2)} \geqq \mathcal{S}_\nu^{(1)}$，すなわち

$$\overline{g}(\mathcal{S}_\nu^{(2)}(u), u) \geqq \overline{g}(\mathcal{S}_\nu^{(1)}(u), u) \qquad (\forall u \in T_pM_1 = T_pM_2)$$

が成り立つ．

(2) $a < a'$ である定数 a, a' に対して，$\mathcal{S}_\nu^{(1)}$ の固有値がすべて a 以下で，$\mathcal{S}_\nu^{(2)}$ の固有値がすべて a' 以上ならば，点 p の十分小さな近傍 U に対して，$M_2 \cap U$ が $U^- \cup M_1$ に含まれている．

証明 点 p の近傍 U として，点 p を中心とした正規近傍をとり，$(x^1, \ldots, x^n)$ を測地的正規座標系とする．ここで $\{(\partial/\partial x^i)_p \,|\, i = 1, \ldots, n-1\}$ が $T_pM_1 = T_pM_2$ を張り，$\nu = (\partial/\partial x^n)_p$ となるように選ぶ．また U を適当にとり直し，

$$M_k \cap U = \{(\boldsymbol{x}, h_k(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^{n-1}),\ \|\boldsymbol{x}\|_0 < \varepsilon\} \qquad (k = 1, 2)$$

としてよい．ただし ε は十分小さな正数で，$h_k(\boldsymbol{x})$ は

$$h_k(0) = \frac{\partial h_k}{\partial x^1}(0) = \cdots = \frac{\partial h_k}{\partial x^{n-1}}(0) = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

を満たす C^∞ 級関数である．ここで $f_k(\boldsymbol{x}, x^n) = x^n - h_k(\boldsymbol{x})$ $(k = 1, 2)$ とおくと，

$$M_k \cap U = \{(\boldsymbol{x}, x^n) \in U \mid f_k(\boldsymbol{x}, x^n) = 0\}$$

と表すことができる．クリストッフェルの記号が点 p ですべて消えていること，すなわち $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ であることに注意すると，

$$\overline{g}(\mathcal{S}_\nu^{(k)}(u), u) = -\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x^i \partial x^j}(0) u^i u^j \qquad \left(u = \sum_{i=1}^{n-1} u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\ k = 1, 2\right)$$

となる．このとき，(1) の仮定は，$h_2(\boldsymbol{x}) - h_1(\boldsymbol{x}) \leqq 0$ $(\|\boldsymbol{x}\|_0 < \varepsilon)$ といい換えられるので，$T_pM_1 = T_pM_2$ 上の二次形式

$$\overline{g}(\mathcal{S}_\nu^{(2)}(u) - \mathcal{S}_\nu^{(1)}(u), v) \qquad (u, v \in T_pM_1 = T_pM_2)$$

は半正定値，よって $\mathcal{S}_\nu^{(2)} \geqq \mathcal{S}_\nu^{(1)}$ が従う．逆に (2) の仮定から，十分小さい ε に対して，$h_2(\boldsymbol{x}) - h_1(\boldsymbol{x}) < 0$ $(\forall \boldsymbol{x} \neq 0,\ \|\boldsymbol{x}\|_0 < \varepsilon)$ が従う． ∎

▶ **例 2** ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{m+1}$ の半径 a の球面 $\mathbf{S}^m(a)$ を考える．$\mathbf{S}^m(a)$

の誘導計量を g_a で表すと，その第二基本形式 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}(u,v) = -\frac{1}{a}g_a(u,v)\nu(p) \quad \left(= -\frac{1}{a}\langle u,v\rangle_0\nu(p)\right)$$
$$\left(p \in \mathbf{S}^m(a),\ u,v \in T_p\mathbf{S}^m(a),\ \nu(p) = \frac{p}{\|p\|_0}\right)$$

となる (例 1 参照)．したがって，単位法ベクトル ν に関するシェイプ作用素 $\mathcal{S}_\nu$ は，接空間の恒等写像の a^{-1} 倍となり，平均曲率ベクトル $\mathcal{H}$ は $-(m/a)\nu$ である．さらに $(x^1,\ldots,x^{m+1})$ を $\mathbf{R}^{m+1}$ の直交座標系とし，各座標関数 x^i を制限して得られる $\mathbf{S}^m(a)$ 上の関数を h^i と表すと，命題 4.5 より h^i のヘッシアンとラプラシアンはそれぞれ次のようになる:

$$\nabla dh^i = -\frac{h^i}{a^2}g_a, \quad \Delta h^i = -\frac{m}{a^2}h^i \qquad (i = 1,\ldots,m+1). \qquad \square$$

▶ **例 3**　k 次元リーマン多様体 (M,g) から (上述の) 球面 $(\mathbf{S}^m(a), g_a)$ への C^∞ 級写像 $\phi : M \to \mathbf{S}^m(a)$ を考える．$\phi^i = h^i \circ \phi$ $(i = 1,\ldots,m+1)$ とおく．さらに $\left(\sum_{i=1}^{m+1} v^i(\partial/\partial x^i) \Longleftrightarrow (v^1,\ldots,v^{m+1})\right.$ によって$\left.\right)$ $\mathbf{R}^{m+1}$ の各接空間を $\mathbf{R}^{m+1}$ 自身と同一視して考え，各点 $p \in M$ に対して，$\mathbf{R}^{m+1}$ を点 $\phi(p)$ において直交分解する:

$$\mathbf{R}^{m+1} = T_{\phi(p)}\mathbf{S}^m(a) + N_{\phi(p)}\mathbf{S}^m(a).$$

この分解において命題 4.5 を適用すると，

$$(\nabla d\phi^1,\ldots,\nabla d\phi^{m+1}) = \nabla d\phi - \frac{1}{a^2}g_a(d\phi,d\phi)\phi,$$
$$(\Delta\phi^1,\ldots,\Delta\phi^{m+1}) = \tau(\phi) - \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{m+1}\|\operatorname{grad}\phi^i\|^2\phi.$$

とくに $\phi : (M,g) \to (\mathbf{S}^m(a), g_a)$ が等長はめ込みのとき，$g = g_a(d\phi,d\phi)$ $\left(= \sum_{i=1}^{m+1} d\phi^i \otimes d\phi^i\right)$ より，ϕ の第二基本形式 $\mathcal{A}$ と平均曲率ベクトル $\mathcal{H}$ はそれぞれ次のように与えられる:

$$(\nabla d\phi^1,\ldots,\nabla d\phi^{m+1}) = \mathcal{A} - \frac{1}{a^2}g\phi,$$
$$(\Delta\phi^1,\ldots,\Delta\phi^{m+1}) = \mathcal{H} - \frac{k}{a^2}\phi. \qquad \square$$

練習問題 4.3　各 $t \in (0,\pi/2)$ に対して，2 次元トーラス $T^2 = \{(e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}) \mid$

$\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}\}$ から 3 次元単位球面 $\mathbf{S}^3$ へのはめ込み写像 ϕ_t を

$$\phi_t((e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_2})) = (\cos t \cos \theta_1, \cos t \sin \theta_1, \sin t \cos \theta_2, \sin t \sin \theta_2)$$

によって定義する．ϕ_t の像 $\phi_t(T^2)$ は，$\mathbf{S}^3$ に埋め込まれたトーラス T_t となり (2.4 節参照)，T^2 上の誘導計量 $\phi_t^* g_1$ を g_t とおくと，

$$g_t = (\cos t)^2 d\theta_1 \otimes d\theta_1 + (\sin t)^2 d\theta_2 \otimes d\theta_2$$

となる．さらに ϕ_t に沿う単位法ベクトル場

$$\nu_t = (-\sin t \cos \theta_1, -\sin t \sin \theta_1, \cos t \cos \theta_2, \cos t \sin \theta_2)$$

に関するシェイプ作用素 $\mathcal{S}_t$ と ϕ_t の平均曲率ベクトル $\mathcal{H}_t$ はそれぞれ

$$\mathcal{S}_t = -(\tan t)\left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}\right) \otimes d\theta_1 + (\cot t)\left(\frac{\partial}{\partial \theta_2}\right) \otimes d\theta_2, \qquad \mathcal{H}_t = -2(\cot 2t)\nu_t$$

となる．これから $\mathcal{H}_t$ の長さは ϕ_t に沿って一定値 $-2\cot 2t$ となり，したがって $t = \pi/4$ のとき，$\mathcal{H}_{\pi/4} = 0$ となる．また，(T^2, g_t) の面積は $t = \pi/4$ のとき最大である．以上の結果を確かめよ．

4.3.2 ガウスの方程式

リーマン多様体 (M, g) からリーマン多様体 $(\overline{M}, \overline{g})$ への等長はめ込み $\phi : M \to \overline{M}$ が存在するとき，M のリーマン曲率テンソル R は，$\overline{M}$ のリーマン曲率テンソル $\overline{R}$ とはめ込みの第二基本形式 $\mathcal{A}$ によって，次のように表される．M の点 p での接ベクトル x, y, z, w に対して，

$$\begin{aligned}&\overline{g}\big(\overline{R}(d\phi(x), d\phi(y))d\phi(z), d\phi(w)\big)\\&\quad = g\big(R(x,y)z, w\big) - \overline{g}\big(\mathcal{A}(x,w), \mathcal{A}(y,z)\big) + \overline{g}\big(\mathcal{A}(x,z), \mathcal{A}(y,w)\big).\end{aligned} \tag{4.4}$$

これを**ガウスの方程式**という．したがって断面曲率に関しては，次の公式が得られる．M の点 p での接平面 σ に対して，

$$\overline{K}(d\phi(\sigma)) = K(\sigma) - \frac{\overline{g}(\mathcal{A}(x,x), \mathcal{A}(y,y)) - \overline{g}(\mathcal{A}(x,y), \mathcal{A}(x,y))}{|x \wedge y|^2}. \tag{4.5}$$

ただし $\{x, y\}$ は σ の基底である．なお，(4.4) の検証は後に残しておく．

さて，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{m+1}$ の半径 a の球面 $\mathbf{S}^m(a)$ の場合，例 3 と (4.5) より，$\mathbf{S}^m(a)$ の断面曲率は，すべての接平面に対して一定値 a^{-2} であることが確かめられる．以下において，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{m+1}$ の超曲面 M を考察しよう．M は向き付けられているとし，したがって単位法ベクトル場 ν が

M 上に存在すると仮定する．このとき，M から単位球面 $\mathbf{S}^m$ への C^∞ 級写像 $G: M \to \mathbf{S}^m$ を $G(p) = \nu(p)$ $(p \in M)$ によって定める．これを M の**ガウス写像**とよぶ．各点 p に対して，点 $G(p)$ での単位球面の接ベクトルは $G(p)$ と直交しているので，$\mathbf{R}^{m+1}$ での移動 $\tau_p : x \to x+p$ によって，点 p での M の接ベクトルとみなし，接空間 $T_{G(p)}\mathbf{S}^m$ と T_pM を同一視する．このとき，その定義から，シェイプ作用素 $\mathcal{S}_\nu$ はガウス写像 G の微分 dG に一致する．各点 $p \in M$ において，シェイプ作用素 $\mathcal{S}_\nu$ は T_pM の対称な線形作用素であるから，重複度も数えて m 個の実固有値をもつ．それらを $\{\lambda_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ とし，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ をそれぞれの固有値に属する固有ベクトルからなる T_pM の正規直交基底とする．このとき，各 λ_i を (単位法ベクトル場 ν に関する) **主曲率**，e_i をそれに対する**主曲率ベクトル** という．(4.5) より $i \neq j$ となる組 (i, j) に対して，e_i と e_j で張られる接平面の断面曲率は

$$K(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j$$

で与えられる．とくに $m = 2$ のとき，曲面 M のガウス曲率は $K = \lambda_1 \lambda_2$ となる．また平均曲率ベクトルは $\mathcal{H} = -(\lambda_1 + \lambda_2)\,\nu$ となる．

ここで，接空間 T_pM の単位接ベクトル v と単位法ベクトル ν で張られる平面 Σ による M の切り口 $M \cap \Sigma$ を考える．これを，点 p の近くで C^∞ 級の正規曲線 $\gamma_v(t)$ として表す．$\gamma_v(0) = p$，${\gamma_v}'(0) = v$ となるようにパラメータを付ける．このとき，$\langle \mathcal{S}_\nu(v), v \rangle_0 = -\langle {\gamma_v}''(0), \nu \rangle_0$ である．したがって，v が主曲率ベクトル e_i のとき，$\lambda_i = -\langle {c_{e_i}}''(0), \nu \rangle_0$ である．ここで ν を $-\nu$ に代

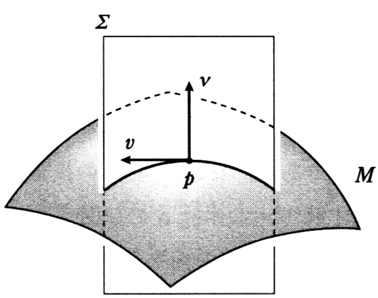


図 4.1

えれば，λ_i は $-\lambda_i$ に代わるが，断面曲率そのものは変わらない (図 4.1).

例題 4.10 上述のように M をユークリッド空間 $\mathbf{R}^{m+1}$ の向き付けられた超曲面とし，$\{\lambda_i \mid i=1,\ldots,m\}$ を (単位法ベクトル場 ν に関する) 主曲率とする.

(1) M の点 p において，次の各条件 (i)–(iii) は互いに同値である.

(i) すべての $i=1,\ldots,m$ に対して $\lambda_i \geqq 0$，またはすべての $i=1,\ldots,m$ に対して $\lambda_i \leqq 0$.

(ii) $i \neq j$ となるすべての組 (i,j) に対して，$\lambda_i\lambda_j \geqq 0$.

(iii) すべての接平面 $\sigma \subset T_pM$ に対して，σ の断面曲率 $K(\sigma) \geqq 0$.

ここで，(i) において $\lambda_i \geqq 0$ を $\lambda_i > 0$ に，$\lambda_i \leqq 0$ を $\lambda_i < 0$ に代えた条件，(ii) において $\lambda_i\lambda_j \geqq 0$ を $\lambda_i\lambda_j > 0$ に代えた条件，(iii) において $K(\sigma) \geqq 0$ を $K(\sigma) > 0$ に代えた条件をそれぞれ (i)′, (ii)′ (iii)′ とすると，これらは互いに同値である.

(2) M がコンパクトであるならば，ある点で条件 (i)′ が成り立つ.

(3) M がコンパクトで，M の断面曲率がすべて正であるとする．このとき，M は球面と微分同相である．さらに M は凸超曲面である (すなわち M は各点における接超平面の一方の側にある).

証明 まず (1) から示そう．(i) と (ii) の同値性は明らか．(iii) から (ii) も明らか．さらに，接平面 σ の正規直交基底を $\{u,v\}$ とし，$u=\sum_{i=1}^m u^i e_i$, $v=\sum_{i=1}^m v^i e_i$ と表すと，

$$K(\sigma) = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\ (u^i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\ (v^i)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i u^i v^i\right)^2$$

となる．したがって，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_m$ となるように番号をつけておくと，$\lambda_1 \geqq 0$ のとき，$\widetilde{u}^i = \sqrt{\lambda_i}u^i$, $\widetilde{v}^i = \sqrt{\lambda_i}v^i$，また $\lambda_m \leqq 0$ のとき，$\widetilde{u}^i = \sqrt{-\lambda_i}u^i$, $\widetilde{v}^i = \sqrt{-\lambda_i}v^i$ とおいて，

$$K(\sigma) = \left(\sum_{i=1}^m (\widetilde{u}^i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^m (\widetilde{v}^i)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^m \widetilde{u}^i\widetilde{v}^i\right)^2$$

と表すと，コーシー・シュワルツの不等式から $K(\sigma) \geqq 0$ が従う．すなわち (i) より (iii) が従う.

(i)′, (ii)′, (iii)′ の同値性も同様である.

次に (2) を示す．$\mathbf{R}^{m+1}$ の一点 q をとり，それへのユークリッドの距離関数 $\|x-q\|_0$ を M に制限して得られる M 上の関数を考え，M のある点 p において最大値をとる

とする (M がコンパクトであることにより M 上の連続関数はある点で最大値をとる). ここでは簡単のため q を原点とする．このとき半径 a の球面 $\mathbf{S}^m(a)$ と M は点 p で接し，M は球体 $\mathbf{B}^{m+1}(a)$ に含まれる．よって例題 4.9 と例 2 より，単位法ベクトル $\nu(p) = p/\|p\|_0$ に関する M のシェイプ作用素の固有値はすべて a^{-1} 以上でなければならない．よって (i)$'$ が成り立つ．

(3) を示すために，ガウス写像 $G: M \to \mathbf{S}^m$ を利用しよう．仮定から $\mathcal{S}_\nu$ の固有値はすべて正かあるいはすべて負である．したがって，とくに $\mathcal{S}_\nu$ は線形同形である．いい換えれば，G の微分 $dG: TM \to T\mathbf{S}^m$ が M の各点で線形同形である．よって G は局所微分同相写像である．さらに，M がコンパクトであることより G は被覆写像であることがわかり，球面が単連結であることから，実際，G は M から $\mathbf{S}^m$ への微分同相写像であることが従う．さらにこの事実と例題 4.9 から残りの主張は明らかであろう． ∎

$\mathbf{R}^3$ の曲面 M を考える．M と単位球面 $\mathbf{S}^2$ それぞれの面積要素を ω_M, ω_1 と記す．このとき，$G^*\omega_1 = K\omega_M$ が成り立つ．このことから，M の点 p において，ガウス曲率 $K(p)$ が正であることは，$dG_p : T_pM \to T_{G(p)}\mathbf{S}^2$ が向きを保つ線形同形写像である，といい換えられる．また，p の小さな近傍 U でのガウス曲率の積分値 $\displaystyle\int_U K\omega_M$ は，G による U の像 $G(U)$ の単位球面での面積を表している．したがって，U を p に近づけていくときの $G(U)$ と U の面積比の極限として，ガウス曲率 K の点 p での値が決まる．一方 $K(p)$ が負のときは，向きが反対になる．実際，Gauss はこれによって曲率を定義して，これが曲面の主曲率の積であることを示し，さらに曲率は曲面の第一基本形式のみによって記述されること (**ガウスの驚きの定理**) を発見した．現代微分幾何学の幕開けであった．

また，M がコンパクトで向き付け可能な曲面ならば，ガウス・ボンネの定理より

$$\int_M G^*\omega_1 = \int_M K\omega_M = 4\pi(1-g) \qquad (g \text{ は } M \text{ の種数})$$

となる．

式 (4.4) の証明　簡単のため M は $\overline{M}$ の部分多様体，すなわち ϕ を包含写像とし，g をその誘導計量とする．また証明したいことは局所的であるから，$\overline{M}$ の局所座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ において考え，$M \cap U = \{(x^1, \ldots, x^n) \mid x^{m+1} = \cdots = x^n = 0\}$ と仮定して示せばよい．また $M \cap U$ 上のベクトル場は，U 上のあるベクトル場の制限と

して考え，ここでは区別しないことにする．このとき，$M \cap U$ 上のベクトル場 X, Y, Z に対して，

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \mathcal{A}(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \mathcal{A}(X,Z)) \\ &\quad - (\nabla_{[X,Y]} Z + \mathcal{A}([X,Y],Z)) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \mathcal{A}(X, \nabla_Y Z) + \overline{\nabla}^{\perp}_X \mathcal{A}(Y,Z) + \mathcal{S}_{\mathcal{A}(Y,Z)}(X) \\ &\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - \mathcal{A}(Y, \nabla_X Z) - \overline{\nabla}^{\perp}_Y \mathcal{A}(X,Z) - \mathcal{S}_{\mathcal{A}(X,Z)}(Y) \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \mathcal{A}([X,Y],Z)\end{aligned}$$

となる．したがって，$\overline{R}(X,Y)Z$ の TM 成分は，

$$R(X,Y)Z + \mathcal{S}_{\mathcal{A}(Y,Z)}(X) - \mathcal{S}_{\mathcal{A}(X,Z)}(Y)$$

で与えられる．ここで M 上のベクトル場 W との内積をとると，

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) = \overline{g}(R(X,Y)Z,W) + g(\mathcal{S}_{\mathcal{A}(Y,Z)}(X),W) - g(\mathcal{S}_{\mathcal{A}(X,Z)}Y,W)$$

となる．さらに

$$\begin{aligned}g(\mathcal{S}_{\mathcal{A}(Y,Z)}X,W) &= -\overline{g}(\mathcal{A}(Y,Z),\mathcal{A}(X,W)), \\ g(\mathcal{S}_{\mathcal{A}(X,Z)}Y,W) &= -\overline{g}(\mathcal{A}(X,Z),\mathcal{A}(Y,W))\end{aligned}$$

より，求める式

$$\begin{aligned}&\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) - \overline{g}(\mathcal{A}(X,W),\mathcal{A}(Y,Z)) + \overline{g}(\mathcal{A}(X,Z),\mathcal{A}(Y,W))\end{aligned}$$

が得られる． ∎

練習問題 4.4 ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の中の次の曲面 M のガウス曲率 K を求めよ．

(1) $M = \{(x,y,x^3-3xy^2) \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$

(2) $M = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\} \qquad (a,b,c>0)$

(3) $M = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\} \qquad (a,b,c>0)$

(**答**: (1) $K = -36(x^2+y^2)/(1+9x^4+18x^2y^2+9y^4)^2$ (このように, ガウス曲率は z 軸を中心としたすべての回転で不変であるが, 曲面自身は 120 度の回転で不変である．なお, 平均曲率ベクトルは $(-54x^5+108x^3y^2+162xy^4)/(1+9x^4+18x^2y^2+9y^4)^{3/2}\,\nu$ となる．ただし $\nu = (-3x^2+3y^2, 6xy, 1)/\sqrt{1+9x^4+18x^2y^2+9y^4}$.) (2) $K = h^4/a^2b^2c^2$. (3) $K = -h^4/a^2b^2c^2$. ここで (2), (3) において $h = (x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4)^{-1/2}$ とおいた.)

4.4 部分多様体の変形

本節では，多様体からリーマン多様体へのはめ込みの変形を考える．それによる誘導計量およびリーマン測度の変化を調べ，第二基本形式，平均曲率ベクトルの意味を理解する．

はじめに，区間 (a,b) と多様体 M との直積 $(a,b)\times M$ から多様体 $\overline{M}$ への C^∞ 級写像 $\Phi(t,p)$ $(a<t<b,\ p\in M)$ を考える．変数 t をパラメータとする M から $\overline{M}$ への写像 $\phi_t(p)=\Phi(t,p)$ $(p\in M)$ は，各 t に対してはめ込みであると仮定する．以下において，$\overline{M}$ にはリーマン計量 $\overline{g}$ が与えられているとし，$g_t=\phi_t^*\overline{g}$ とおいて，M 上の誘導計量の C^∞ 級 1 径数族 $\{g_t\}$ を考える．また，$\mu(g_t)$ をリーマン計量 g_t のリーマン測度とする．このとき，g_t と $\mu(g_t)$ の 1 次微分を計算したい．

はじめにいくつか記号を用意しよう．まず t を一つ固定して，ϕ_t に沿うベクトル場 $V_t : M\to T\overline{M}$ を

$$V_t(p)=d\Phi_{(t,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\qquad(p\in M)$$

によって定める．さらに M の各点 p に対して，$T_{\phi_t(p)}\overline{M}$ の部分空間 $d\phi_t(T_pM)$ の (計量 $\overline{g}$ に関する) 直交補空間を $N_p^{(t)}M$ で表し，$V_t(p)$ の $d\phi_t(T_pM)$ 成分と $N_p^{(t)}M$ 成分をそれぞれ $V_t(p)^T$, $V_t(p)^N$ と表す．ここでは簡単のために，$d\phi_t(X)=V_t^T$ によって定まる M 上のベクトル場 X も V_t^T と表して区別しない．そして，$\nabla, \mathcal{A}, \mathcal{H}$ をそれぞれ計量 g_t のレビ・チビタ接続，ϕ_t の第二基本形式，平均曲率ベクトルとする (なお これらもパラメータ t に依存するのだが，記号が煩雑になるので省略する)．

命題 4.11 (1) M の任意の点における二つの接ベクトル u, v に対して，

$$\frac{d}{dt}\,g_t(u,v)=g_t(\nabla_u V_t^T, v)+g_t(u,\nabla_v V_t^T)-2\overline{g}(\mathcal{A}(u,v),V_t^N).$$

(2) M 上の台がコンパクトな可積分関数 f に対して，

$$\frac{d}{dt}\int_M f\,d\mu(g_t)=\int_M f\left(\mathrm{div}_{g_t}V_t^T-\overline{g}(\mathcal{H},V_t^N)\right)\,d\mu(g_t).$$

ここに $\mathrm{div}_{g_t}V_t^T$ は，M 上のベクトル場 V_t^T の計量 g_t に関する発散を表す．

証明 M の座標近傍 $(U,\psi=(x^1,\ldots,x^m))$ の上で考える．ここで U は相対コン

パクトとする．また簡単のため U と $\mathbf{R}^m$ の開集合 $\psi(U)$ を同一視して考える．U 上で，計量 g_t を

$$g_t = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(t,p)dx^i \otimes dx^j \qquad (a < t < b,\ p \in U)$$

と表す．また写像 $\Phi : (a,b) \times U \to \overline{M}$ に沿うベクトル場 $\widetilde{V}$, E_i $(i = 1, \ldots, m)$ をそれぞれ $\widetilde{V} = d\Phi(\partial/\partial t)$, $E_i = d\Phi(\partial/\partial x^i)$ によって定めて，次の等式に注意する (命題 3.9 (2), (3) 参照):

$$\overline{g}(E_i, \nabla^{\phi}_{\partial/\partial x^j} V_t^N) + \overline{g}(\nabla^{\phi}_{\partial/\partial x^j} E_i, V_t^N) = \frac{\partial}{\partial x^j}\overline{g}(E_i, V_t^N) = 0,$$
$$\nabla^{\Phi}_{\partial/\partial t} E_i = \nabla^{\Phi}_{\partial/\partial x^i} \widetilde{V} \qquad (i,j = 1, \ldots, m).$$

これらを使って $\partial g_{ij}(t,p)/\partial t$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t,p) &= \frac{\partial}{\partial t}\overline{g}(E_i, E_j) \\
&= \overline{g}(\nabla^{\Phi}_{\partial/\partial t} E_i, E_j) + \overline{g}(E_i, \nabla^{\Phi}_{\partial/\partial t} E_j) \\
&= \overline{g}(\nabla^{\Phi}_{\partial/\partial x^i} \widetilde{V}, E_j) + \overline{g}(E_i, \nabla^{\Phi}_{\partial/\partial x^j} \widetilde{V}) \\
&= \overline{g}(\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} V_t, E_j) + \overline{g}(E_i, \nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^j} V_t) \\
&= \overline{g}(\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} V_t^T, E_j) + \overline{g}(\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} V_t^N, E_j) \\
&\qquad + \overline{g}(E_i, \nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^j} V_t^T) + \overline{g}(E_i, \nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^j} V_t^N) \\
&= \overline{g}(\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} V_t^T, E_j) - \overline{g}(V_t^N, \nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} E_j) \\
&\qquad + \overline{g}(E_i, \nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^j} V_t^T) - \overline{g}(\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^j} E_i, V_t^N)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} V_t^T = d\phi_t(\nabla_{\partial/\partial x^i} V_t^T) + \mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, V_t^T\right),$$

$$\nabla^{\phi_t}_{\partial/\partial x^i} E_j = d\phi_t\left(\nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

を代入して，次の等式を得る:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t,p) &= g\left(\nabla_{\partial/\partial x^i} V^T, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \overline{g}\left(V_t^N, \mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) \\
&\qquad + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\partial/\partial x^j} V_t^T\right) - \overline{g}\left(\mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), V_t^N\right) \\
&= g\left(\nabla_{\partial/\partial x^i} V_t^T, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\nabla_{\partial/\partial x^j} V_t^T, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&\qquad - 2\overline{g}\left(\mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), V_t^N\right). \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

これが (1) を示しているのは明らかであろう．

さてリーマン測度 $\mu(g_t)$ は，U において

$$\mu(g_t) = \sqrt{\det\big(g_{ij}(p,t)\big)}\, dx^1 \cdots dx^m$$

と表されるので，(2) を示すために

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det\big(g_{ij}(p,t)\big)} = \Big(\mathrm{div}_{g_t} V_t^T - \overline{g}(\mathcal{H}, V_t^N)\Big)\sqrt{\det\big(g_{ij}(p,t)\big)} \tag{4.7}$$

となることを示す．実際，$\big(g^{ij}(p,t)\big)$ を $\big(g_{ij}(p,t)\big)$ の逆行列とすると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\det\big(g_{ij}(p,t)\big) = \det\big(g_{ij}(p,t)\big)\left(\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(p,t)\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}(p,t)\right)$$

となる (1 章の例 5 参照)．この右辺は，(4.6) より，

$$2\det\big(g_{ij}(p,t)\big)(\mathrm{div}\, V_t^T - \overline{g}(\mathcal{H}, V_t^N))$$

に等しい．よって (4.7) が従う． ∎

▶ **例 4**　$\overline{M}$ として, 区間 (a,b) と m 次元多様体 M の直積を考える．$\Phi(t,p) = (t,p)$ とする．M のリーマン計量 g と (a,b) 上の正値 C^∞ 級関数 $f(t)$ によって，$\overline{M}$ にはリーマン計量 $\overline{g} = dt^2 + f(t)^2 g$ が与えられているとする．このとき $g_t = f(t)^2 g$ より，超曲面 $M_t = \{t\} \times M$ の第二基本形式 $\mathcal{A}_t$，単位法ベクトル場 $\nu_t = \partial/\partial t$ に関するシェイプ作用素 $\mathcal{S}_t$，そして平均曲率ベクトル $\mathcal{H}_t$ はそれぞれ

$$\mathcal{A}_t = -\frac{f'(t)}{f(t)} g_t\, \nu_t, \quad \mathcal{S}_t = \frac{f'(t)}{f(t)} I, \quad \mathcal{H}_t = -m\frac{f'(t)}{f(t)}\, \nu_t$$

となる．ただし I は TM_t の恒等写像を表す． □

練習問題 4.5　リーマン多様体 (M,g) と (N,h) のねじれ積 $\overline{M} = (M \times N, g \times_w h)$ を考える．ただし w は M 上の正値 C^∞ 級関数とする．$\pi_1 : M \times N \to M$，$\pi_2 : M \times N \to N$ をそれぞれ自然な射影とし, M の点 p に対して $N_p = {\pi_1}^{-1}(p) = \{p\} \times N$, N の点 q に対して $M_q = {\pi_2}^{-1}(q) = M \times \{q\}$ とおく．ここで，$\pi_1 : \overline{M} \to M$ はリーマン沈め込みである．このとき，各 M_q $(q \in N)$ の第二基本形式は恒等的に 0 であることを示せ．また，M の点 p での接ベクトル ν に対して，N_p の点 (p,q) での ν の水平リフトを $\overline{\nu}_p$ と記すと，$\overline{\nu}_p$ は N_p の法ベクトル場を定める．このとき，$\overline{\nu}_p$ に関する N_p のシェイプ作用素は，$w(p)^{-1} g_p(\mathrm{grad}\, w, \nu) I$ となることを示せ．ただし I は TN_p の恒等写像を表す．（ヒント：M の正規曲線 $c(t)$ $(a < t < b)$ に対して，$(a,b) \times N$ から $\overline{M}$ への写像 $\Phi(t,q) = (c(t), q)$ を考えると，$\Phi^*(g \times_w h) = dt \otimes dt + w(c(t))^2 h$ となる．これに注意して，例 4 を適用する．）

注意 命題 4.11 において，とくに $M=\overline{M}$ で，$\phi_t:\overline{M}\to\overline{M}$ が微分同相写像である場合を考える．この場合，V_t は $\overline{M}$ 上のベクトル場となり，結論は次のようになる:

(1) $$\frac{d}{dt}g_t(u,v)=g_t(\nabla_u V_t,v)+g_t(u,\nabla_v V_t),$$

(2) $$\frac{d}{dt}\int_{\overline{M}} f\,d\mu(g_t)=\int_{\overline{M}} f\,\mathrm{div}_{g_t}V_t\ d\mu(g_t).$$

とくに各 ϕ_t が $\overline{g}$ の等長変換のとき，すなわち $g_t=\overline{g}$ を満たすとき，

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_u V_t,v)+\overline{g}(u,\overline{\nabla}_v V_t)=0 \qquad (\forall u,v\in T_p\overline{M},\ p\in\overline{M})$$

が成り立つ．一般に

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_u X,v)+\overline{g}(u,\overline{\nabla}_v X)=0 \qquad (\forall u,v\in T_p\overline{M},\ p\in\overline{M})$$

を満たすリーマン多様体 $(\overline{M},\overline{g})$ 上のベクトル場 X を**キリング場**という．

次に，多様体 M からリーマン多様体 $(\overline{M},\overline{g})$ へのはめ込み $\phi:M\to\overline{M}$ を考える．ここでは簡単のため $(\overline{M},\overline{g})$ は完備リーマン多様体であると仮定する．ϕ に沿うベクトル場 $V\in\mathcal{X}_\phi(M,\overline{M})$ に対して，

$$\Phi(t,p)=\exp_{\phi(p)}tV(p) \qquad (t\in\mathbf{R},\ p\in M)$$

とおく．ここで $\exp_q:T_q\overline{M}\to\overline{M}$ は $(\overline{M},\overline{g})$ の指数写像を表す．$t=0$ のとき $\Phi(0,p)=\phi(p)$ となり，ϕ の変形が得られる．ϕ 自身ははめ込みであるとしているが，ϕ_t もはめ込みであるかどうかは一般にはわからない．しかし，M の相対コンパクトな開集合 U を一つ固定すると，十分小さい正数 ε に対して，$|t|<\varepsilon$ ならば，ϕ_t は U においてはめ込みとなり，誘導計量 $g_t=\phi_t^*\overline{g}$ も，U 上で意味をもつ．このとき，V の台が U に含まれているとすると，命題 4.11 (1) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_t(u,v)(t=0)&=g(\nabla_u V^T,v)+g(u,\nabla_v V^T)-2g(\mathcal{A}(u,v),V^N)\\&=g(\nabla_u V^T,v)+g(u,\nabla_v V^T)+2g(\mathcal{S}_{V^N}(u),v)\end{aligned}$$
$$(u,v\in T_pM,\ p\in U) \qquad (4.8)$$

が従う．ここで g は ϕ による誘導計量 $\phi^*\overline{g}$，$\mathcal{A}$，$\mathcal{S}_{V^N}$ はそれぞれはめ込み ϕ の第二基本形式，法ベクトル V^N に関するシェイプ作用素を表す．(4.8) において，V を法ベクトル場として $t=0$ とすると，ϕ の第二基本形式 (の符号を反対に変えたもの) は誘導計量 $g=\phi^*\overline{g}$ の 1 次微分を表している．また，命題

4.11 (2) において $f=1$ とすれば，V の台が U に含まれているとき，発散公式 (定理 1.6) より

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}_{g_t}(U)(t=0) = -\int_U \overline{g}(\mathcal{H}, V^N)\, d\mu(g)$$

が従う．ただし $\mathcal{H}$ は ϕ の平均曲率ベクトルを表す．このように，平均曲率ベクトルは部分多様体の体積の減少する方向を指している．

第二基本形式が恒等的に 0 であるとき，はめ込み $\phi : M \to (\overline{M}, \overline{g})$ は**全測地的**であるという．このとき，M の誘導計量 $g = \phi^*\overline{g}$ に関する任意の測地線は，ϕ によって $\overline{M}$ の測地線に移る．つまり $c : (a,b) \to (M,g)$ を測地線とすると，$\phi \circ c : (a,b) \to (\overline{M}, \overline{g})$ も測地線である．これは第二基本形式の定義を思い出せばすぐ納得できるであろう．ここで c が最短線である，すなわち，どの二点 a', b' $(a', b' \in (a,b))$ に対しても，$c_{|[a',b']}$ は $c(a')$ と $c(b')$ を結ぶ最短線であるとしても，$\phi \circ c$ も同様に $\overline{M}$ における最短線とは限らないことに注意しておく (a' と b' が十分近いときにはもちろん最短線であるが)．測地線自身，1 次元部分多様体として全測地的であるが，全測地的部分多様体の簡単な例をあげると，ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g_0)$ において，k 次元線形部分空間，あるいはそれを平行に移動して得られる k 次元アフィン部分空間は全測地的である．また，ユークリッド空間の球面 $\mathbf{S}^{n-1}(a)$ において，これと $\mathbf{R}^n$ の k 次元線形部分空間との共通部分は全測地的である．なお，双曲空間の場合については，課題として残しておく．

一般に，リーマン多様体 $\overline{M}$ の等長変換 ϕ の固定点の集合

$$K = \{p \in \overline{M} \mid \phi(p) = p\}$$

の各連結成分は，一点か全測地的部分多様体であることが知られている (実際 $\phi(p)=p$, $\phi(q)=q$ そして c を p と q を結ぶ測地線とすれば，$\phi(c)$ も同様である．p と q が十分近いときには，c と $\phi(c)$ は一致して，c は K の p を含む連結成分に入らなければならない)．

平均曲率ベクトルが恒等的に 0 であるとき，はめ込み $\phi : M \to (\overline{M}, \overline{g})$ は**極小**であるという．たとえば，xy 平面 $\mathbf{R}^2$ の中の領域 D において定義された C^∞ 級関数 $h(x,y)$ のグラフで与えられる曲面を考える．つまり $\phi(x,y) = (x, y, z = h(x,y))$ とおいてその平均曲率ベクトルを求めると，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{(1+(\partial h/\partial x)^2+(\partial h/\partial y)^2)^{3/2}}$$
$$\times \left\{ \left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right\}\nu$$
$$(\nu = (-\partial h/\partial x, -\partial h/\partial y, 1)/\sqrt{1+(\partial h/\partial x)^2+(\partial h/\partial y)^2}\,)$$

となる．したがって，3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ において曲面 $z = h(x, y)$ $((x, y) \in D)$ が，同じ境界をもつ曲面の中で面積最小とすると，h は

$$\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

を満たす．これは**極小曲面の方程式**とよばれ，J. L. Lagrange によって導かれた．曲面は局所的にはいつでもある平面上のグラフの形で表されるが，一般にグラフとは限らず『閉じた空間曲線を境界にもつ曲面の中で面積が最小であるものを求めよ』という有名なプラトー問題をはじめ，極小曲面，さらに一般のリーマン多様体の極小部分多様体に関する研究成果はたいへん多く，他の研究分野と深く関わりながら今日でも活発に研究されている．

なお極小部分多様体といういい方をするが，必ずしも変分に関して“体積汎関数”がそこで極小値をとるという意味ではない (練習問題 4.3 参照)．1 変数関数あるいは多変数関数の極値問題と同様に，その汎関数の 2 次微分が重要となってくる (4.7 節参照)．

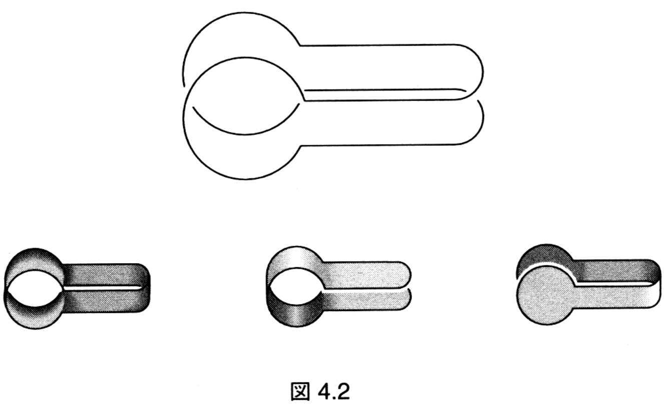


図 4.2

練習問題 4.6 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ からユークリッド空間 $(\mathbf{R}^3, g_0)$ への写像を

$$\Phi(t,x,y) = \cos t(\sinh y\sin x, -\sinh y\cos x, x) + \sin t(\cosh y\cos x, \cosh y\sin x, y)$$

によって定義し，$\phi_t(x,y) = \Phi(t,x,y)$ とおく．次の (1), (2) を示せ．

(1) $\phi_t^* g_0$ は t によらず，$\phi_t^* g_0 = (\cosh y)^2(dx\otimes dx + dy\otimes dy)$ である．

(2) はめ込み $\phi_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ の第二基本形式は，

$$-(\sin t)dx\otimes dx + (\cos t)(dx\otimes dy + dy\otimes dx) + (\sin t)dy\otimes dy$$

で与えられる．(このように，すべての t に対して平均曲率ベクトルは恒等的に 0 となり，ϕ_t は極小はめ込みである．なお，$\phi_0 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ をヘリコイド (常螺旋面), $\phi_{\pi/2} : [0,2\pi]\times\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ をカテノイド (懸垂面) という．カテノイドは懸垂曲線を回転して得られる回転面である．)

4.5 超曲面の等距離変形

リーマン多様体の中の一点から等距離 r にある点のなす集合は，r が十分小さい範囲において滑らかな超曲面 (球面) の族をなす．本節ではこれを念頭において，ある条件を満たす超曲面の族とそのシェイプ作用素について考察し，次節のための準備とする．

4.5.1 シェイプ作用素とリッカティ型方程式

前節同様，多様体 M からリーマン多様体 $(\overline{M}, \overline{g})$ へのはめ込みの C^∞ 級の 1 径数族 $\{\phi_t = \Phi(t,*) \mid a < t < b\}$ を考えるが，ここではさらに次の三つの仮定をおく．

(i) $M, \overline{M}$ の次元をそれぞれ m, n とすると，$m = n-1$ である．

(ii) 各 t に対して，$V_t\,(= d\Phi_{(t,*)}(\partial/\partial t))$ は ϕ_t に沿う M の単位法ベクトル場である．

(iii) M の各点 p を固定したとき得られる $\overline{M}$ の曲線 $c_p(t) = \Phi(t,p)$ は，単位速度の測地線である．したがって，$\tau\in(a,b)$ を一つ止めたとき，

$$\Phi(t,p) = \exp_{\phi_\tau(p)}(t-\tau)V_\tau(p) \qquad (p\in M)$$

となっている (図 4.3).

写像 Φ は $(a,b)\times M$ から $\overline{M}$ の開集合への局所微分同相写像であるが，こ

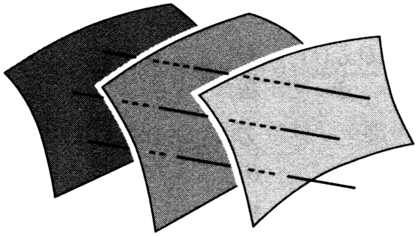


図 4.3

こでは簡単のため $(a,b)\times M$ 上の誘導計量 $\Phi^*\overline{g}$ を考え，$g^*=\Phi^*\overline{g}$ とおく．まず与えられた Φ に関する条件から

$$g^* = dt\otimes dt + g_t \qquad (g_t=\phi_t^*\overline{g})$$

と表すことができる．すなわち，ベクトル空間としての自然な直和分解

$$T_{(t,p)}((a,b)\times M)\simeq T_t(a,b)+T_pM\simeq \mathbf{R}+T_pM$$

は g^* に関して直交分解となっており，$(a,b)\times M$ 上のベクトル場 $\partial/\partial t$ は単位の長さである $(\|\partial/\partial t\|=1)$．また $(a,b)\times M$ 上の C^∞ 級関数 h を $h(t,p)=t$ とおけば，$\partial/\partial t$ は h の勾配場 grad h ということになる．$M_t=\{t\}\times M$ とおくと，M_t が h の等高面ということになり，grad h がその上の単位法ベクトル場である．命題 2.1 の用語を用いれば，$\{M_t\}$ は "平行な超曲面の族" ということになる．M_t の第二基本形式，grad h に関するシェイプ作用素をそれぞれ $\mathcal{A}_t$ および $\mathcal{S}_t$ と表す．

さて M の接ベクトル $v\in T_pM$ に対して，$\gamma(0)=p,\gamma'(0)=v$ となる C^∞ 級曲線 $\gamma(s)$ $(|s|<\varepsilon)$ を任意にとり，g^* に関する測地変分 $H(t,s)=(t,\gamma(s))$ から得られる測地線 $c_p(t)=(t,p)$ に沿うベクトル場 $J_v(t)=dH_{(t,s)}(\partial/\partial s)(s=0)$ について考える．$g_t(v,v)=g^*(J_v(t),J_v(t))$ であるから，J_v とリーマン曲率についての関係に基づいて，J_v すなわちリーマン計量 g^* を調べる．これが本節の目的である．

まず，

$$\frac{DJ_v(t)}{dt}=\mathcal{S}_t(J_v(t)) \qquad (a<t<b) \tag{4.9}$$

が成り立つことに注意する．実際，

$$\begin{aligned}\frac{DJ_v(t)}{dt} &= \frac{D}{\partial t}dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)(s=0)\\ &= \frac{D}{\partial s}dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(s=0)\\ &= \mathcal{S}_t(J_v(t)).\end{aligned}$$

ここで最後の等号は，$(D/\partial s)dH(\partial/\partial t)$ が $dH(\partial/\partial t)$ に直交し，したがって超曲面 M_t に接していることとシェイプ作用素 $\mathcal{S}_t$ の定義による．

次に，(4.9) の両辺を共変微分して，

$$\begin{aligned}\frac{D^2J_v(t)}{dt^2} &= \frac{D\mathcal{S}_t}{dt}(J_v(t)) + \mathcal{S}_t\left(\frac{DJ_v}{dt}\right)\\ &= \frac{D\mathcal{S}_t}{dt}(J_v(t)) + {\mathcal{S}_t}^2(J_v(t))\end{aligned} \tag{4.10}$$

となる．ここで ${\mathcal{S}_t}^2$ は $\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_t$ (合成) を表し，$\mathcal{S}_t$ の共変微分 $D\mathcal{S}_t/dt$ を次のように定める．$\{E_1(t), \ldots, E_m(t)\}$ を測地線 $c_p(t)$ に沿う平行なベクトル場からなる $T_{c_p(t)}M_t$ の正規直交基底とする．このとき，

$$\mathcal{S}_t(E_i(t)) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_i^j(t)E_j(t) \tag{4.11}$$

によって，区間 (a, b) から m 次対称行列に値をとる C^∞ 級写像 $t \to \Sigma(t) = \left(\sigma_i^j(t)\right)$ を定める．そして

$$\frac{D\mathcal{S}_t}{dt}(E_i(t)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d\sigma_i^j(t)}{dt}E_j(t)$$

によって，$T_{c_p(t)}M_t$ の線形変換 $D\mathcal{S}_t/dt$ を定義する．これは $\{E_1(t), \ldots, E_m(t)\}$ の選び方によらずに定まる ((3.10) 参照)．

一方，J_v は測地変分から得られる変分ベクトル場より，c_p に沿うヤコビ場であるので，

$$\frac{D^2J_v(t)}{dt^2} + R(J_v(t), c_p'(t))c_p'(t) = 0$$

を満たしている．ただし R は g^* のリーマン曲率テンソルを表す．ここで

$$\mathcal{R}_t(x) = R(x, c_p'(t))c_p'(t) \qquad (x \in T_{c_p(t)}M_t)$$

によって $T_{c_p(t)}M_t$ の線形変換 $\mathcal{R}_t$ を定義すると，(4.10) より，$\mathcal{S}_t$ が次の 1 階

非線形微分方程式を満たすことがわかる:

$$\frac{D\mathcal{S}_t}{dt}(J_v(t)) + {\mathcal{S}_t}^2(J_v(t)) + \mathcal{R}_t(J_v(t)) = 0 \qquad (a < t < b).$$

この方程式が任意の接ベクトル $v \in T_pM$ に対して成り立つので,

$$\frac{D\mathcal{S}_t}{dt} + {\mathcal{S}_t}^2 + \mathcal{R}_t = 0 \qquad (a < t < b) \tag{4.12}$$

が導かれる. また (4.11) のように表すとき, 方程式 (4.12) は, 次の m 次対称行列に値をもつ関数についての微分方程式

$$\Sigma(t)' + \Sigma(t)^2 + K(t) = 0 \qquad (a < t < b) \tag{4.13}$$

と同等である. なお $K(t)$ は, (i,j) 成分が

$$K_i^j(t) = g^*(R(E_i(t), {c_p}'(t)){c_p}'(t), E_j(t))$$

によって与えられる行列である.

さて, (4.12) のトレースを考えると,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{trace}\,\mathcal{S}_t + \mathrm{trace}\,({\mathcal{S}_t}^2) + \mathrm{trace}\,\mathcal{R}_t = 0$$

となる. ここでコーシー・シュワルツの不等式より

$$\frac{1}{m}(\mathrm{trace}\ \mathcal{S}_t)^2 \leqq \mathrm{trace}\,({\mathcal{S}_t}^2) \tag{4.14}$$

が成り立つことに注意する. これを上式に代入して, 次の不等式を得る:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{trace}\ \mathcal{S}_t + \frac{1}{n-1}(\mathrm{trace}\ \mathcal{S}_t)^2 + \mathrm{trace}\ \mathcal{R}_t \leqq 0. \tag{4.15}$$

ここで $\mathrm{trace}\,\mathcal{R}_t$ は, ${c_p}'(t)$ のリッチ曲率 $\mathrm{Ric}({c_p}'(t), {c_p}'(t))$ である. さらにこの不等式において, ある t で等号が成り立つための必要十分条件は, 不等式 (4.14) において等号が成り立つことであるから, ある数 $\lambda(t)$ があって,

$$\mathcal{S}_t = \lambda(t)I \qquad (I \text{ は } T_{c_p(t)}M_t \text{ の恒等写像})$$

と表せることと同値であることに注意する.

そして M_t の第二基本形式 $\mathcal{A}_t$, grad h に関するシェイプ作用素 $\mathcal{S}_t$ は, それぞれの定義から次のように表すことができる (例題 4.8 参照). $x, y \in T_{(t,p)}M_t$ に対して,

$$\mathcal{A}_t(x,y) = -\nabla dh(x,y)\,\mathrm{grad}\ h, \qquad g_t(\mathcal{S}_t(x), y) = \nabla dh(x,y). \tag{4.16}$$

ここで,

$$\nabla dh(\mathrm{grad}\ h, \mathrm{grad}\ h) = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\ h(\|\mathrm{grad}\ h\|^2) = 0$$

より, trace $\mathcal{S}_t$ は h のラプラシアン Δh に等しい. すなわち,

$$\mathrm{trace}\ \mathcal{S}_t = \Delta h \tag{4.17}$$

となる. したがって M_t の平均曲率ベクトル場 $\mathcal{H}_t$ は, 次のように表すことができる:

$$\mathcal{H}_t = -(\Delta h)\ \mathrm{grad}\ h.$$

さらに $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ を T_pM の基底とし, m 次行列 $\bigl(g^*(J_{v_i}(t), J_{v_j}(t))\bigr)$ の行列式の平方根を $\Theta_p(t)$ とおくと, (4.7) より

$$\frac{\Theta_p'(t)}{\Theta_p(t)} = \mathrm{trace}\,\mathcal{S}_t \quad (= \Delta h) \tag{4.18}$$

となることに注意する.

ここでもう一つ考察を加えておこう. 接ベクトル $v \in T_pM$ $(v \neq 0)$ に対して, 対応するヤコビ場 J_v は, はめ込みという仮定から, 定義されている区間において決して 0 にはならない. すなわち

$$\|J_v(t)\| > 0 \qquad (a < t < b)$$

である. そこでまず $\|J_v\|'$ を計算すると,

$$\|J_v\|' = \frac{1}{\|J_v\|}\ g^*\left(J_v, \frac{DJ_v}{dt}\right).$$

よって,

$$\begin{aligned}
&(\log\|J_v\|)'' \\
&= \|J_v\|^{-2}\left(\left\|\frac{DJ_v}{dt}\right\|^2 + g^*\left(J_v, \frac{D^2J_v}{dt^2}\right)\right) - 2\|J_v\|^{-4}g^*\left(J_v, \frac{DJ_v}{dt}\right)^2 \\
&= \|J_v\|^{-2}\left(\left\|\frac{DJ_v}{dt}\right\|^2 - g^*(J_v, R(J_v, c_p')c_p')\right) - 2\|J_v\|^{-4}g^*\left(J_v, \frac{DJ_v}{dt}\right)^2 \\
&= \|J_v\|^{-2}\left\|\frac{DJ_v}{dt}\right\|^2 - 2\|J_v\|^{-4}g^*\left(J_v, \frac{DJ_v}{dt}\right)^2 - K(c_p', J_v).
\end{aligned}$$

ここで, $K(c_p', J_v)$ は c_p' と J_v で張られる接平面の断面曲率を表す.

したがって,

$$\left(\frac{\|J_v\|'}{\|J_v\|}\right)' + \left(\frac{\|J_v\|'}{\|J_v\|}\right)^2 + K(c_p', J_v)$$
$$= \|J_v\|^{-4}\left(\left\|\frac{DJ_v}{dt}\right\|^2 \|J_v\|^2 - g^*\left(J_v, \frac{DJ_v}{dt}\right)^2\right)$$

となる．この右辺に，コーシー・シュワルツの不等式

$$\left|g^*\left(J_v, \frac{DJ_v}{dt}\right)\right| \leqq \left\|\frac{DJ_v}{dt}\right\| \|J_v\|$$

を適用して，$\|J_v\|'/\|J_v\|$ は，次の不等式を満たすことがわかる:

$$\left(\frac{\|J_v\|'}{\|J_v\|}\right)' + \left(\frac{\|J_v\|'}{\|J_v\|}\right)^2 + K(c_p', J_v) \geqq 0 \qquad (a < t < b). \tag{4.19}$$

さて，シェイプ作用素の満たす**リッカティ型方程式** (4.12)(あるいは同等の (4.13))，シェイプ作用素のトレースの満たす不等式 (4.15)，そしてヤコビ場の満たす不等式 (4.19) に基づいて，断面曲率およびリッチ曲率と計量やリーマン測度に関する有益な情報を得ることができる．実際これらの方程式と不等式から，リーマン幾何において基本的ないくつかの比較定理を導くことができる．これが次節の課題であるが，本節の残りでそのための準備をしておく．

4.5.2　比較定理のための補題

$(\overline{M}, \overline{g})$ が定曲率 k の空間形のとき，リッカティ型方程式 (4.12)，あるいはそれと同等な (4.13) を解くことは容易である．実際このときには，前項の記号をそのまま使うと，$\mathcal{R}_t = kI$ (I は恒等写像) となり，したがって $K(t) = k$ である．$\tau \in (a, b)$ を一つ任意に固定して，$\mathcal{S}_\tau$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ とする．各 $e_i(\tau)$ が λ_i に従属した固有ベクトルであるように正規直交基底 $\{e_1(\tau), \ldots, e_m(\tau)\}$ を選ぶ．したがって，$\Sigma(\tau)$ が対角成分 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ をもつ対角行列となる．このとき，

$$\Sigma(t)' + \Sigma(t)^2 + kE_m = 0 \qquad (E_m \text{ は } m \text{ 次単位行列})$$

の解 $\Sigma(t)$ は，対角成分が $(F_1(t), \ldots, F_m(t))$ である対角行列である．ただし，各 $F_i(t)$ は初期条件 $F_i(\tau) = \lambda_i$ を満たすリッカティ方程式

$$F(t)' + F(t)^2 + k = 0 \qquad (a < t < b)$$

の解である．具体的に $F_i(t)$ は次で与えられる:

$$F_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i \cos(k^{1/2}(t-\tau)) - k^{1/2}\sin(k^{1/2}(t-\tau))}{\lambda_i k^{-1/2}\sin(k^{1/2}(t-\tau)) + \cos(k^{1/2}(t-\tau))} & (k>0) \\ \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i(t-\tau)+1} & (k=0) \\ \dfrac{\lambda_i \cosh(|k|^{1/2}(t-\tau)) - |k|^{1/2}\sinh(|k|^{1/2}(t-\tau))}{\lambda_i |k|^{-1/2}\sinh(|k|^{1/2}(t-\tau)) + \cosh(|k|^{1/2}(t-\tau))} & (k<0). \end{cases}$$

ここで F_i とその定義域 (a,b) に注意する．たとえば $k=0$ のとき，開区間 (a,b) において，$\lambda_i(t-\tau)+1$ は 0 にはならないという条件がいままでの議論の前提となっている．したがって，$\lambda_i>0$ ならば $\tau-a \leqq 1/\lambda_i$，そして $\lambda_i<0$ ならば $b-\tau \leqq 1/|\lambda_i|$ でなければならない．他の場合も同様である．

さて一般に，$k(t)$ を区間 (a,b) 上の連続関数として，リッカティ方程式

$$F(t)' + F(t)^2 + k(t) = 0 \qquad (a<t<b) \tag{4.20}$$

について，解 F がもし存在するならば，$\tau \in (a,b)$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して，

$$f(t) = \exp\left(\int_\tau^t F(s)\,ds + \alpha\right)$$

とおくと，f は区間 (a,b) 上のヤコビ方程式

$$f(t)'' + k(t)f(t) = 0 \qquad (a<t<b) \tag{4.21}$$

の正値解となる．逆にこの方程式の正値解 f が存在するならば，

$$F(t) = \frac{f(t)'}{f(t)} \quad \left(= \frac{d}{dt}\log f(t)\right)$$

とおけば，F は区間 (a,b) 上のリッカティ方程式 (4.20) の解である (シェイプ作用素とヤコビ場の関係式 (4.9) と比較してほしい)．ここで (4.20) と (4.21) における等号を不等号に置き換えても同様のことがいえることに注意しよう．すなわち，上の対応において，

$$F' + F^2 + k \leqq 0 \ (\geqq 0) \Longleftrightarrow f'' + kf \leqq 0 \ (\geqq 0)$$

となる．

補題 4.12　$k_i(t)$ $(i=1,2)$ を区間 (a,b) 上の二つの連続関数で，$k_1(t) \geqq k_2(t)$ $(a<t<b)$ を満たしているとする．さらに部分区間 (a_i,b_i) $(a \leqq a_i <$

$b_i \leqq b$) において定義された二つの連続関数 $F_i(t)$ があって，それぞれ次のようにリッカティ方程式を満たしているとする:

$$F_1(t)' + F_1(t)^2 + k_1(t) = 0 \qquad (a_1 < t < b_1),$$
$$F_2(t)' + F_2(t)^2 + k_2(t) = 0 \qquad (a_2 < t < b_2).$$

ここで二つの部分区間の共通部分 $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ は空集合ではないとし，$\tau \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ を一つ選んでおく．このとき，次の (1)–(3) が成り立つ．

(1) $F_1(\tau) \leqq F_2(\tau)$ のとき，F_2 は区間 (a_2, b_1) あるいはそれをこえて定義されているとしてよい．したがって $b_1 \leqq b_2$ とみなしてよく，$F_1(t) \leqq F_2(t)$ $(\tau \leqq t < b_1)$ が成り立つ．さらに，ある $t_0 \in (\tau, b_1)$ に対して，$F_1(t_0) = F_2(t_0)$ ならば，$[\tau, t_0]$ において $F_1 = F_2$, $k_1 = k_2$ でなければならない．

(2) $F_1(\tau) \geqq F_2(\tau)$ のとき，F_1 は区間 (a_2, b_1) あるいはそれをこえて定義できる．したがって $a_1 \leqq a_2$ とみなしてよく，$F_1(t) \geqq F_2(t)$ $(a_1 < t \leqq \tau)$ が成り立つ．さらに，ある $t_0 \in (a_1, \tau)$ に対して，$F_1(t_0) = F_2(t_0)$ ならば，$[t_0, \tau)$ において $F_1 = F_2$, $k_1 = k_2$ でなければならない．

(3) $a = a_1 = a_2$ とする．さらに，$f_i(t) = \exp \int_\tau^t F_i(s)\,ds$ とおいて，$\lim_{t \to a+} f_i(t) = 0$, $\lim_{t \to a+} f_i'(t) > 0$ $(i = 1, 2)$ と仮定する．このとき，F_2 は区間 (a, b_1) あるいはそれをこえて定義できる．つまり $b_1 \leqq b_2$ とみなしてよく，$F_1(t) \leqq F_2(t)$ $(a < t < b_1)$ が成り立つ．さらに，ある $t_0 \in (a, b_1)$ に対して，$F_1(t_0) = F_2(t_0)$ ならば，$(a, t_0]$ において $F_1 = F_2$, $k_1 = k_2$ でなければならない．

証明 (1) を示す．$a^* = \max\{a_1, a_2\}$, $b^* = \min\{b_1, b_2\}$ とおき，さらに

$$\eta(t) = (F_1(t) - F_2(t)) \exp\left(\int_\tau^t F_1(s) + F_2(s)\ ds\right) \quad (a^* < t < b^*)$$

とおく．$\eta'(t)$ を計算すると，

$$\eta'(t) = (F_1'(t) - F_2'(t) + F_1(t)^2 - F_2(t)^2) \exp\left(\int_\tau^t F_1(s) + F_2(s)\ ds\right)$$
$$= (-k_1(t) + k_2(t)) \exp\left(\int_\tau^t F_1(s) + F_2(s)\,ds\right).$$

よって仮定 $k_1 \geqq k_2$ より，$\eta'(t) \leqq 0$ $(a^* < t < b^*)$ が従い，$\eta(t)$ は単調減少である．

$\eta(\tau) = F_1(\tau) - F_2(\tau) \leqq 0$ と仮定しているので，$\eta(t) \leqq 0$ $(\tau \leqq t < b^*)$，すなわち

$$F_1(t) \leqq F_2(t) \qquad (\tau \leqq t < b^*) \tag{4.22}$$

が成り立つ．またある $t_0 \in (\tau, b^*)$ に対して，$F_1(t_0) = F_2(t_0)$ ならば，$[\tau, t_0)$ において $F_1 = F_2$, $k_1 = k_2$ でなければならない．

さて $b^* = b_1$ ならば (1) は示されたことになるので，$b_2 < b_1$ として議論を続けよう．まず $[\tau, b_2)$ において，k_2 は連続であるから下に有界である．したがって，ある定数 c があって，$k_2(t) \geqq c$ $(\tau \leqq t \leqq b_2)$ である．ここで $c < 0$ としてよい．そこで

$$F_c(t) = \frac{\lambda\cosh(|c|^{1/2}(t-\tau)) - |c|^{1/2}\sinh(|c|^{1/2}(t-\tau))}{\lambda|c|^{-1/2}\sinh(|c|^{1/2}(t-\tau)) + \cosh(|c|^{1/2}(t-\tau))}$$

とおく．ただし $F_c(\tau) = \lambda > \max\{f_2(\tau), 0\}$ となるように λ を選んでおく．このとき，F_c は $[\tau, \infty)$ においてリッカティ方程式 $F_c' + {F_c}^2 + c = 0$ を満たす．よって以前の議論と同様に，F_c と F_2 を比較して，$F_2(t) \leqq F_c(t)$ $(\tau \leqq t < b_2)$ が従う．したがって $F_2(t)$ は $[\tau, b_2)$ において上に有界である．ここで $b_2 < b_1$ としているので，(4.22) より F_2 は $[\tau, b_2)$ において下にも有界であることがわかる．結局 b_2 をこえて定義されることになる．これから $b^* = b_1$ としてよいことがわかる．

以上で (1) の証明は完了したが，残りの主張 (2) と (3) も同様に証明することができるので省略する． ∎

注意 補題 4.12 の証明をみなおしてみる．F_1 はリッカティ方程式の解である必要はなく，不等式

$$F_1'(t) + F_1(t)^2 + k_1(t) \leqq 0 \qquad (a_1 < t < b_1)$$

を満たしていれば (1) における結論が同様に成り立つ．さらに，F_2 もリッカティ方程式の解とは限らず，不等式

$$F_2'(t) + F_2(t)^2 + k_2(t) \geqq 0 \qquad (a_2 < t < b_2)$$

を満たしているとき，もし $b_2 < b_1$ ならば，F_2 は，(1) の場合には $[\tau, b_2)$ において，(3) の場合には (a, b_2) において，それぞれ有界であることがわかる．

4.6 比較定理

断面曲率やリッチ曲率などが表現するリーマン多様体の幾何を比較定理とよばれる基本的な定理をとおして学ぶ．これが本節の目標である．

4.6.1 ビショップおよびラウチの比較定理

まず**ビショップの比較定理**を述べる．リッチ曲率が下に有界な完備リーマン

多様体の幾何と解析を研究するうえで基本的な結果である．

定理 4.13 (M,g) を m 次元完備リーマン多様体とする．ある定数 k があって，M のリッチ曲率が $(m-1)k$ 以上であるとする．このとき，任意の点 p に対して，p を中心とする半径 r の距離球体 $B(p,r)$ の体積 $\mathrm{Vol}(B(p,r))$ と，定曲率 k の単連結空間形 $\mathbf{M}_k$ の半径 r の距離球体 $\mathbf{B}_k(r)$ の体積 $V_k(r)$ の比 $\mathrm{Vol}(B(p,r))/V_k(r)$ は，r に関して単調減少である．すなわち，

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,r))}{V_k(r)} \geqq \frac{\mathrm{Vol}(B(p,R))}{V_k(R)} \qquad (0 < r \leqq R < \infty)$$

が成り立つ．とくに

$$\mathrm{Vol}(B(p,r)) \leqq V_k(r) \qquad (0 < r < \infty)$$

となる．さらにある r に対して，$\mathrm{Vol}(B(p,r)) = V_k(r)$ ならば，$B(p,r)$ は $\mathbf{B}_k(r)$ と等長である．

このビショップの定理は，M.Gromov によって体積比の単調性の重要性を指摘されて以来，**ビショップ・グロモフの比較定理**として引用されることも多い．この定理の顕著な応用として，次の結果を示す．

定理 4.14 $M=(M,g)$ を定理 4.13 と同じ条件を満たす完備リーマン多様体とする．k が正のとき，次が成り立つ．

(1) M はコンパクトであり，その直径 $\mathrm{diam}(M)$ は，$\mathbf{M}_k$ の直径 $\pi/\sqrt{k}$ をこえない．さらに $\mathrm{diam}(M) = \pi/\sqrt{k}$ となるのは，M が $\mathbf{M}_k$ に等長であるとき，かつそのときに限る．

(2) M の基本群は有限である．

この定理の (1) の前半の結果とその直接の帰結である (2) は，S. B. Myers による．(1) の後半の結果は S.-Y. Cheng による結果で，**最大直径定理**とよばれている．それ以前には，断面曲率が下から正の定数 k で押さえられている場合に，V.A.Toponogov によって証明されていた．

さて，次に**ラウチの比較定理**を (定理 4.13 にあわせて) 述べる．断面曲率に関する仮定のもとに，ヤコビ場の長さ，したがってリーマン計量自身の情報が得られる．

定理 4.15　(M,g), (N,h) をそれぞれ完備リーマン多様体とする．M の点 p を始点とする正規測地線 $\alpha:[0,\ell]\to M$ と，N の点 q を始点とする正規測地線 $\beta:[0,\ell]\to N$ に対して，次の二つの条件 (i), (ii) が満たされているとする．

(i) 任意の $t\in[0,\ell]$，および $\alpha(t)$ の接ベクトル $\alpha'(t)$ を含む任意の接平面 Σ と，$\beta(t)$ の接ベクトル $\beta'(t)$ を含む任意の接平面 $\widetilde{\Sigma}$ に対して，断面曲率に関して，

$$K_M(\Sigma)\geqq K_N(\widetilde{\Sigma})$$

が成り立つ．

(ii) α に沿って点 p の共役点は存在しない．

このとき，β に沿って点 q の共役点は存在しない．さらに α に沿うヤコビ場 J と β に沿うヤコビ場 $\widetilde{J}$ がそれぞれ $J(0)=0$, $\widetilde{J}(0)=0$ を満たすとすると，$J(t)$ の長さ $\|J(t)\|$ と $\widetilde{J}$ の長さ $\|\widetilde{J}(t)\|$ の比 $\|J(t)\|/\|\widetilde{J}(t)\|$ は $(0,\ell]$ において単調減少である．すなわち

$$\frac{\|J(t)\|}{\|\widetilde{J}(t)\|}\geqq\frac{\|J(T)\|}{\|\widetilde{J}(T)\|}\qquad(0<t\leqq T\leqq\ell)$$

が成り立つ．さらに $w=(DJ/dt)(0)$, $\widetilde{w}=(D\widetilde{J}/dt)(0)$ とおいて，

$$\|\widetilde{w}\|\|J(t)\|\leqq\|w\|\|\widetilde{J}(t)\|\qquad(0\leqq t\leqq\ell)$$

が成り立つ．

定理 4.13 と定理 4.15 に述べられている内容を理解するために，以下において，まずより一般的な考察を行い，その後これら二つの定理および定理 4.14 の証明を与える．

4.6.2　定理 4.13 と定理 4.14 の証明

(M,g) を m 次元完備リーマン多様体とする．M の点 p における単位接ベクトル v に対して，$c_v(t)=\exp tv$ とおいて，$\rho(v)$ を (3.28) において定義したように，$d_g(p,c_v(t))=t$ を満たす正数 t の上限とする．また測地線 c_v に沿う点 p の共役点が存在しないとき $\sigma(v)=+\infty$ とおき，存在するとき $c_v(\sigma(v))$ が最初の共役点であるとすることによって $\sigma(v)$ を定義する．このとき $0<\rho(v)\leqq\sigma(v)$ $(\leqq+\infty)$ である (命題 3.25 参照)．

次に単位接ベクトル v を一つ固定して，$b<\sigma(v)$ を満たす正数 b をとり，v の単位接球面 $\mathbf{S}(1)$ における近傍 U を $b<\sigma(u)$ $(\forall u\in U)$, すなわち $(0,b)\times U$ から M への写像 $\Phi(t,u)=\exp_p tu$ が局所微分同相写像であるように選ぶ．4.5.1 項のように $(0,b)\times U$ 上の誘導計量 Φ^*g を考え，簡単のためここではそれも同じ記号 g で表す．以下において，4.5.1 項の M, $\overline{M}$ をそれぞれ U, M に置き換える．また $\mathbf{S}(1)$ の計量 (ユークリッド空間 (T_pM,g_p) からの誘導計量) を，記号の混乱を避けるためにここでは g_{std} と記す．

U の点 u に対して，$e_m=u$ である T_pM の正規直交基底 $\{e_1,\ldots,e_m\}$ を一つ選ぶ．$\{e_1,\ldots,e_{m-1}\}$ は，T_pM において原点から平行に u に移動して，T_uU の g_{std} に関する正規直交基底であると考える．J_i $(=J_{e_i})$ を $J_i(0)=0$, $(DJ_i/dt)(0)=e_i$ $(i=1,\ldots,m-1)$ を満たす c_u に沿うヤコビ場とし，$(m-1)$ 次正方行列 $\bigl(g(J_i(t),J_j(t))\bigr)$ の行列式の平方根を $\Theta_u(t)$ で表す．このとき，(4.18) によると，

$$\frac{{\Theta_u}'(t)}{\Theta_u(t)}=\mathrm{trace}\,\mathcal{S}_t((t,u))\qquad(0<t<b,\ u\in U)$$

となり，したがって (4.15) より，$\Theta_u^{1/(m-1)}(t)$ は次の不等式を満たす:

$$\left(\frac{(\Theta_u^{1/(m-1)})'}{\Theta_u^{1/(m-1)}}\right)'+\left(\frac{(\Theta_u^{1/(m-1)})'}{\Theta_u^{1/(m-1)}}\right)^2+\frac{\mathrm{trace}\,\mathcal{R}_t}{m-1}\leqq 0.$$

ここで $\mathrm{trace}\,\mathcal{R}_t$ は，${c_u}'(t)$ 方向の M のリッチ曲率 $\mathrm{Ric}({c_u}'(t),{c_u}'(t))$ である．さらに $\Theta_u(t)$ の定義 (J_i $(i=1,\ldots,m)$ の初期条件) より，

$$\Theta_u^{1/(m-1)}(0)=0,\qquad(\Theta_u^{1/(m-1)})'(0)=1$$

を満たすことに注意する．

ここで次の仮定をおく．ある連続関数 $k(t)$ $(0\leqq t<\infty)$ があって，

$$\mathrm{Ric}({c_u}'(t),{c_u}'(t))\geqq(m-1)k(t)\qquad(0\leqq\forall t<+\infty,\ \forall u\in U).\quad(4.23)$$

この $k(t)$ に対して，$[0,\infty)$ 上の C^2 級関数 f_k を

$${f_k}''(t)+k(t)f_k(t)=0,\qquad f_k(0)=0,\ {f_k}'(0)=1$$

の解とする．$f_k(t)=0$ となる正数 t の最初の値を $\tau(k)$ とおき，$(0,\infty)$ においてつねに $f_k>0$ ならば，$\tau(k)=+\infty$ と理解する．$\tau(k)<+\infty$ ならば，

$t \to \tau(k)$ のとき $(\log f_k)'(t)$ は $-\infty$ に発散する．よって，補題 4.12 (3) とその後の注意より $b \leqq \tau(k)$ となり，さらに

$$\frac{(\Theta_u^{1/(m-1)}(t))'}{\Theta_u^{1/(m-1)}(t)} \leqq \frac{f_k{}'(t)}{f_k(t)} \qquad (0 < t < b,\ u \in U),$$

すなわち，

$$\frac{\Theta_u{}'(t)}{\Theta_u(t)} \leqq (m-1)\frac{f_k{}'(t)}{f_k(t)} \qquad (0 < t < b,\ u \in U)$$

が成り立つ．

ここで $u = v$ に対しては，b を $\sigma(v)$ に近づけ，それに応じて必要ならば U を小さくとっていくことによって，次が得られる:

$$\sigma(v) \leqq \tau(k), \tag{4.24}$$

$$\operatorname{trace} \mathcal{S}_t = \frac{\Theta_v{}'(t)}{\Theta_v(t)} \leqq (m-1)\frac{f_k{}'(t)}{f_k(t)} \qquad (0 < t < \sigma(v)). \tag{4.25}$$

したがって，

$$\left(\frac{\Theta_v}{f_k^{m-1}}\right)' = \frac{\Theta_v}{f_k^{m-1}}\left(\frac{\Theta_v{}'}{\Theta_v} - (m-1)\frac{f_k{}'}{f_k}\right) \leqq 0$$

となり，Θ_v / f_k^{m-1} は $(0, \sigma(v))$ において単調減少

$$\frac{\Theta_v(s)}{f_k{}^{m-1}(s)} \geqq \frac{\Theta_v(t)}{f_k{}^{m-1}(t)} \qquad (0 < s \leqq t < \sigma(v))$$

である．ここで $s \to 0$ のとき，左辺は 1 に収束するので

$$\Theta_v(t) \leqq f_k^{m-1}(t) \qquad (0 < t < \sigma(v))$$

となる．さらに

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\displaystyle\int_0^t \Theta_v(s)\,ds}{\displaystyle\int_0^t f_k^{m-1}(s)\,ds}\right)' \\
&\quad = \frac{f_k^{m-1}(t)}{\left(\displaystyle\int_0^t f_k^{m-1}(s)\,ds\right)^2} \int_0^t \left(\frac{\Theta_v(t)}{f_k^{m-1}(t)} - \frac{\Theta_v(s)}{f_k^{m-1}(s)}\right) f_k^{m-1}(s)\,ds \\
&\quad \leqq 0
\end{aligned}$$

より，$\int_0^t \Theta_v(s)\,ds \Big/ \int_0^t f_k^{m-1}(s)\,ds$ も区間 $(0,\sigma(v))$ において単調減少となり，

$$\frac{\displaystyle\int_0^{t\wedge\rho(v)} \Theta_v(s)\,ds}{\displaystyle\int_0^{t\wedge\rho(v)} f_k^{m-1}(s)\,ds} \geqq \frac{\displaystyle\int_0^{T\wedge\rho(v)} \Theta_v(s)\,ds}{\displaystyle\int_0^{T\wedge\rho(v)} f_k^{m-1}(s)\,ds} \qquad (0 < t \leqq T < \tau(k)) \tag{4.26}$$

が導かれる．ここで $t \wedge \rho(v) = \min\{t, \rho(v)\}$ とおいた．

さて，M の点 p を中心とする半径 t の距離球体の体積は，点 p の最小跡の m 次元測度は 0 であるから，

$$\mathrm{Vol}(B(p,t)) = \int_{v\in\mathbf{S}(1)} \left(\int_0^{t\wedge\rho(v)} \Theta_v(s)\,ds \right) d\mu(g_{\mathrm{std}})$$

で与えられる．したがって，リッチ曲率の下からの評価 (4.23) がすべての単位接ベクトル v に対して成り立っていると仮定すると，(4.26) から結局，次の体積比の単調性が導かれた:

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,t))}{\omega_{m-1}\displaystyle\int_0^t f_k^{m-1}(s)\,ds} \geqq \frac{\mathrm{Vol}(B(p,T))}{\omega_{m-1}\displaystyle\int_0^T f_k^{m-1}(s)\,ds} \qquad (0 < t \leqq T \leqq \tau(k)). \tag{4.27}$$

とくに，$t \to 0$ のとき左辺は 1 に収束するので，体積の上からの評価

$$\mathrm{Vol}(B(p,t)) \leqq \omega_{m-1} \int_0^t f_k^{m-1}(s)\,ds \qquad (0 < t \leqq \tau(k)) \tag{4.28}$$

が得られる．ここで ω_{m-1} は $\mathbf{S}(1)$ の体積を表す．k が定数のときは，右辺は $\mathbf{M}_k$ の半径 t の距離球体の体積 $V_k(t)$ で，一般の k に対しては $\mathbf{B}(\tau(k)) = [0,\tau(k)) \times \mathbf{S}(1)$ 上のリーマン計量 $g_k = dt \otimes dt + f_k(t)^2 g_{\mathrm{std}}$ に関する半径 t の距離球体の体積である．

ここで等号の成立について検討する．評価式 (4.28) において，ある t で等号が成り立つとき上の議論を逆にたどっていくと，$\rho : \mathbf{S}(1) \to (0, +\infty]$ の連続性から，すべての $v \in \mathbf{S}(1)$ に対して $\rho(v) = \tau(k)$ が成り立ち，$\mathcal{R}_t = k(t)I$, $\mathcal{S}_t = (\log f_k(t))' I$, そして $g_t = f_k(t)^2 g_{\mathrm{std}}$ となり，結局 $g = dt \otimes dt + f_k(t)^2 g_{\mathrm{std}}$ がわかる．

定理 4.13 の証明　(4.27), (4.28) と等号に関する上の議論から明らかである． ∎

定理 4.14 の証明 k が正の定数であるから, $\tau(k)=\pi/\sqrt{k}$ となり, (4.24) より, すべての点 p とすべての方向 v に対して, $\sigma(v)$ は $\pi/\sqrt{k}$ をこえない. 特に M はコンパクトであり, その直径 $\mathrm{diam}(M)$ は $\pi/\sqrt{k}$ をこえない. さらに最大直径 $\mathrm{diam}(M)=\pi/\sqrt{k}$ のとき, $d_g(p,q)=\pi/\sqrt{k}$ となる二点 p と q をとる. $0<r<R=\pi/\sqrt{k}$ として, 定理 4.13 を適用すると,

$$\mathrm{Vol}(B(p,r)) \geqq \frac{V_k(r)}{V_k(R)}\mathrm{Vol}(M), \quad \mathrm{Vol}(B(q,R-r)) \geqq \frac{V_k(R-r)}{V_k(R)}\mathrm{Vol}(M)$$

となり, $\mathrm{Vol}(B(p,r))+\mathrm{Vol}(B(q,R-r)) \geqq \mathrm{Vol}(M)$ が従う.

一方, $B(p,r)\cap B(q,R-r)=\emptyset$ より $\mathrm{Vol}(M) \geqq \mathrm{Vol}(B(p,r))+\mathrm{Vol}(B(q,R-r))$, したがって上の不等式においてすべて等号が成り立つ. とくに $\mathrm{Vol}(M)=V_k(\pi/\sqrt{k})$ である. これは M が球面に等長であることを示している. □

次に, M の普遍被覆を $\pi:\widetilde{M}\to M$ とする. $\widetilde{M}$ に誘導計量 $\widetilde{g}=\pi^*g$ を考えることによって, $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ は完備リーマン多様体である. そのリッチ曲率も正数 $(m-1)k$ 以上であるので, $\widetilde{M}$ はコンパクトである. よって M の基本群は有限でなければならない.

練習問題 4.7 定理 4.13 の条件を満たす完備リーマン多様体に対して, 次の距離球体の体積に関する評価式を示せ.

(1) M の点 p と $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$ に対して,

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,r_3))-\mathrm{Vol}(B(p,r_2))}{V_k(r_3)-V_k(r_2)} \leqq \frac{\mathrm{Vol}(B(p,r_1))}{V_k(r_1)}.$$

(2) M の二点 p, q に対して $d=d_g(p,q)$ とおく. $r_1 \leqq d+r_2$ ならば,

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(q,r_2))}{V_k(d+r_2)} \leqq \frac{\mathrm{Vol}(B(p,r_1))}{V_k(r_1)}$$

が成り立つ. また $r_1+r_2 \leq d$ ならば,

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,r_1))}{V_k(d+r_1)-V_k(d-r_1)} \leqq \frac{\mathrm{Vol}(B(q,r_2))}{V_k(r_2)}$$

が成り立つ.

4.6.3 定理 4.15 の証明

さて, 断面曲率とヤコビ場との関係をみてみよう. 前項のはじめの部分にもどる. U の点 u に対して, それに直交する接ベクトル $w\in T_pM$ は, T_pM の原点から u に平行に移して T_uU の元と考える. J_w を $J_w(0)=0$, $(DJ_w/dt)(0)=w$ を満たす c_u に沿うヤコビ場とする. J_w は少なくとも区間 $(0,\sigma(u))$ において

0 になることはなく，(4.19) より次の微分不等式を満たす:

$$\left(\frac{\|J_w\|(t)'}{\|J_w\|(t)}\right)' + \left(\frac{\|J_w\|(t)'}{\|J_w\|(t)}\right)^2 + K(c_u'(t), J_w(t)) \geqq 0$$
$$(0 < t < \sigma(u)).$$

ここで $K(c_u'(t), J_w(t))$ は $c_u'(t)$ と $J_w(t)$ の張る接平面の断面曲率である．

まずはじめに，ある連続関数 $\overline{k}(t)$ $(0 < t < \infty)$ があって，

"$c_u'(t)$ を含む任意の接平面 Σ の断面曲率 $K(\Sigma) \leqq \overline{k}(t)$ $(0 < t < \infty)$"

という条件のもとに考える．この $\overline{k}$ に対して，$f_{\overline{k}}$ および $\tau(\overline{k})$ を前項と同様に定める．このとき補題 4.12 (3) とその後の注意より $b \geqq \tau(\overline{k})$ となり，そして

$$\frac{\|J_w\|(t)'}{\|J_w\|(t)} \geqq \frac{f_{\overline{k}}'(t)}{f_{\overline{k}}(t)} \qquad (0 < t < \tau(\overline{k}))$$

が従う．ここで $u = v$ に対しては，b を $\tau(\overline{k})$ に近づけ，それに応じて必要ならば U を小さくとることによって，次のことが成り立つ:

$$\sigma(v) \geqq \tau(\overline{k}), \tag{4.29}$$

$$\frac{\|J_w\|(t)'}{\|J_w\|(t)} \geqq \frac{f_{\overline{k}}'(t)}{f_{\overline{k}}(t)} \qquad (0 < t < \tau(\overline{k}),\ w \in T_pM,\ w \perp v).$$

したがって

$$\left(\frac{\|J_w\|}{f_{\overline{k}}}\right)' = \frac{\|J_w\|}{f_{\overline{k}}}\left(\frac{\|J_w\|'}{\|J_w\|} - \frac{f_{\overline{k}}'}{f_{\overline{k}}}\right) \geqq 0$$

となり，$\|J_w\|/f_{\overline{k}}$ は $(0, \tau(\overline{k}))$ において単調増加

$$\frac{\|J_w\|(s)}{f_{\overline{k}}(s)} \leqq \frac{\|J_w\|(t)}{f_{\overline{k}}(t)} \qquad (0 < s \leqq t < \tau(\overline{k})) \tag{4.30}$$

である．ここで $s \to 0$ とすると，左辺は $\|DJ_w/dt\|(0) = \|w\|$ に収束するので，

$$\|w\| f_{\overline{k}}(t) \leqq \|J_w(t)\| \qquad (0 < t < \tau(\overline{k}),\ w \in T_pM,\ w \perp v) \tag{4.31}$$

が成り立つ．さらに

$$\|J_w\|' = \frac{1}{\|J_w\|} g\left(J_w, \frac{DJ_w}{dt}\right) = \frac{1}{\|J_w\|} g(J_w, \mathcal{S}_t(J_w)) \tag{4.32}$$

に注意すると，

$$g(J_w, \mathcal{S}_t(J_w)) \geqq \frac{f_{\overline{k}}'(t)}{f_{\overline{k}}(t)} g(J_w, J_w) \qquad (0 < t < \tau(\overline{k}))$$

が従う．これは，シェイプ作用素の固有値が $f_{\overline{k}}{}'(t)/f_{\overline{k}}(t)$ 以上であること，つまり，

$$\mathcal{S}_t \geqq \frac{f_{\overline{k}}{}'(t)}{f_{\overline{k}}(t)}\, I \qquad (0 < t < \tau(\overline{k})) \tag{4.33}$$

を意味している．そして (4.31) をいい換えると

$$g_t \geqq f_{\overline{k}}(t)^2 g_{\mathrm{std}}$$

となる．

次に，ある連続関数 $\underline{k}(t)$ があって，

"$c_u'(t)$ を含む任意の接平面 Σ の断面曲率 $K(\Sigma) \geqq \underline{k}(t)$ $(0 < t < \infty)$"

という条件のもとに考える．$f_{\underline{k}}(t), \tau(\underline{k})$ も前段と同様に定義する．このとき次が成り立つ:

$$\sigma(v) \leqq \tau(\underline{k}), \tag{4.34}$$

$$\frac{\|J_w\|(s)}{f_{\underline{k}}(s)} \geqq \frac{\|J_w(t)\|}{f_{\underline{k}}(t)} \qquad (0 < s \leqq t < \sigma(v),\ w \in T_pM,\ w \perp v), \tag{4.35}$$

$$\|J_w\| \leqq \|w\| f_{\underline{k}}(t) \qquad (0 < t < \sigma(v)), \tag{4.36}$$

$$\mathcal{S}_t \leqq \frac{f_{\underline{k}}'(t)}{f_{\underline{k}}(t)}\, I \qquad (0 < t < \sigma(v)), \tag{4.37}$$

$$g_t \leqq f_{\underline{k}}(t)^2 g_{\mathrm{std}}. \tag{4.38}$$

これらの評価式 (4.34)〜(4.38) は，次節において測地線のエネルギーに関する第二変分公式の応用として示す．

定理 4.15 の証明 (1) における仮定より，$K_M(\Sigma) \geqq k(t) \geqq K_N(\widetilde{\Sigma})$ を満たす連続関数 $k(t)$ $(0 \leqq t \leqq \ell)$ をとり，$f_k{}'' + kf_k = 0$, $f_k(0) = 0$, $f_k{}'(0) = 1$ の解 f_k を考える．$f_k(t) = 0$ となる正数 t の最初の値を $\tau(k)$ とおく (いままでの議論では，簡単のため $\ell = +\infty$ として考えたが，有限区間 $[0, \ell]$ の場合も本質的な違いはない)．このとき，(4.34) と (4.29) より，

$$\sigma(\alpha'(0)) \leqq \tau(k) \leqq \sigma(\beta'(0))$$

となる．(2) の仮定は，$\ell < \sigma(\alpha'(0))$ を意味している．したがって，区間 $(0, \ell]$ において $f_k > 0$ となり，(4.35) より $\|J\|/f_k$ は単調減少，(4.30) より $\|\widetilde{J}\|/f_k$ は単調増大となる．このように，$\|J\|/\|\widetilde{J}\|$ は単調減少であることがわかる． ∎

4.6.4 ラプラシアンとヘッシアンの比較定理

m 次元完備リーマン多様体 (M,g) において，点 p への距離 (関数) $r_p(q)=d_g(p,q)$ $(q\in M)$ を考える．点 p の最小跡 $\mathcal{C}(p)$ を M から除いた領域，つまり点 p を中心とした最大の正規近傍を U_p とおく．r_p は $U_p\setminus\{p\}$ において C^∞ 級関数であるが，そのヘッシアン ∇dr_p とラプラシアン Δr_p について，(4.16), (4.17), (4.25), (4.33), (4.37) から次の定理が従う．

定理 4.16 (M,g), U_p, r_p を上述のものとする．

(1) ある定数 k があって，(M,g) のリッチ曲率が $(m-1)k$ 以上であるとする．このとき，$U_p\setminus\{p\}$ において

$$\Delta r_p \leqq (m-1)\frac{{f_k}'(r_p)}{f_k(r_p)}$$

が成り立つ．

(2) ある定数 $\underline{k}$ があって，M の断面曲率が $\underline{k}$ 以上であるとする．このとき，$U_p\setminus\{p\}$ において，

$$\nabla dr_p \leqq \frac{{f_{\underline{k}}}'(r_p)}{f_{\underline{k}}(r_p)}(g-dr_p\otimes dr_p)$$

が成り立つ．

(3) ある定数 $\overline{k}$ があって，M の断面曲率が $\overline{k}$ 以下であるとする．このとき，$U_p\setminus\{p\}$ において，

$$\nabla dr_p \geqq \frac{{f_{\overline{k}}}'(r_p)}{f_{\overline{k}}(r_p)}(g-dr_p\otimes dr_p)$$

が成り立つ．

この定理の (1) と (2) においては，距離関数が滑らかである範囲に制限している．しかしこれらの評価式は，最小跡においても成り立つ大域的な結果であることが知られている．ただし最小跡において距離関数は C^∞ 級ではない．したがって，ラプラシアン Δr_p とヘッシアン ∇dr_p を適当に拡張した意味で理解しなければならない．

4.6.5 トポノゴフの比較定理

最後にトポノゴフの比較定理を説明しよう．まずユークリッド平面 (空間) における三角形の**余弦公式**

$$\widetilde{\ell}_2{}^2 = \widetilde{\ell}_1{}^2 + \widetilde{\ell}_3{}^2 - 2\widetilde{\ell}_1\widetilde{\ell}_3 \cos\widetilde{\theta}_2 \tag{4.39}$$

からはじめる．ここで $\widetilde{\ell}_3, \widetilde{\ell}_1, \widetilde{\ell}_2$ は三角形 $\triangle\,\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$ の三辺の長さで，$\widetilde{\theta}_2$ は頂点 $\widetilde{p}_2$ での内角である．

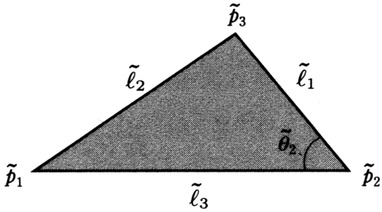


図 4.4

余弦公式 (4.39) は次のようにして示される．点 $\widetilde{p}_1$ からの距離 (関数) を $\widetilde{r}$ とおき，頂点 $\widetilde{p}_2$ を始点，頂点 $\widetilde{p}_3$ を終点とする線分 (正規測地線) を $\widetilde{c}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \widetilde{\ell}_1)$ とする．ここで $\xi_0(t) = \frac{1}{2}\widetilde{r}(\widetilde{c}(t))^2$ とおくと，$\frac{1}{2}\nabla d\widetilde{r}^2 = g_0$ (g_0 はユークリッド計量) より，$\xi_0(t)$ は，次の微分方程式および初期条件を満たすことがわかる:

$$\begin{cases} \xi_0{}''(t) = 1, \\ \xi_0(0) = \dfrac{1}{2}\widetilde{\ell}_3{}^2, \quad \xi_0{}'(0) = -\widetilde{\ell}_3 \cos\widetilde{\theta}_2. \end{cases}$$

これを解いて，

$$\xi_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - (\widetilde{\ell}_3 \cos\widetilde{\theta}_2)t + \frac{1}{2}\widetilde{\ell}_3{}^2$$

となる．よって，$t = \widetilde{\ell}_1$ のとき $\xi_0(\widetilde{\ell}_2) = (1/2)\widetilde{\ell}_2{}^2$ より，余弦公式が導かれる．

同じ方法で，球面や双曲平面 (空間) における測地線を三辺とする三角形 (測地三角形) に対する**余弦公式**を示すことができる．実際 $\triangle\,\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$ を定曲率 $k\,(\neq 0)$ の単連結空間形 $(\mathbf{M}_k, g_k)$ 内の三角形とする．$k > 0$ のときは，$\widetilde{\ell}_i \leqq \pi/\sqrt{k}$ $(i = 1, 2, 3)$ と仮定する．三辺すべて最短測地線であり，そして $\xi_k(t) = h_k(\widetilde{r}(\widetilde{c}(t)))$ $(0 \leqq t \leqq \widetilde{\ell}_1)$ によって区間 $[0, \widetilde{\ell}_1]$ 上の関数を定義する．ただし

$$h_k(u) = \int_0^u f_k(s)\,ds = \frac{1}{k}(1 - f_k{}'(u))$$

とおいた．このとき，$\widetilde{r}$ は $\nabla d\widetilde{r} = (f_k'(\widetilde{r})/f_k(\widetilde{r}))(g_k - d\widetilde{r}\otimes d\widetilde{r})$ を満たすので，$\nabla dh_k(\widetilde{r}) = (1-kh_k(\widetilde{r}))g_k$ となる．したがって，$\xi_k(t)$ は次の微分方程式と初期条件を満たすことがわかる:

$$\begin{cases} \xi_k''(t) + k\xi_k = 1, \\ \xi_k(0) = \dfrac{1}{k}(1 - f_k'(\widetilde{\ell}_3)), \quad \xi_k'(0) = -f_k(\widetilde{\ell}_3)\cos\widetilde{\theta}_2. \end{cases}$$

これを解いて，

$$\xi_k(t) = -f_k(\widetilde{\ell}_3)f_k(t)\cos\widetilde{\theta}_2 - \frac{1}{k}f_k'(\widetilde{\ell}_3)f_k'(t) + \frac{1}{k}.$$

よって $t = \widetilde{\ell}_1$ のとき，$\xi_k(\widetilde{\ell}_1) = (1/k)(1 - f_k'(\widetilde{\ell}_2))$ より，

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k}f_k'(\widetilde{\ell}_2) = -f_k(\widetilde{\ell}_3)f_k(\widetilde{\ell}_1)\cos\widetilde{\theta}_2 - \frac{1}{k}f_k'(\widetilde{\ell}_3)f_k'(\widetilde{\ell}_1) + \frac{1}{k}$$

となり，これを整理して $\mathbf{M}_k$ における測地三角形に対する余弦公式が導かれる:

$$\cos\sqrt{k}\,\widetilde{\ell}_2 = \cos\sqrt{k}\,\widetilde{\ell}_1\cos\sqrt{k}\,\widetilde{\ell}_3 + \sin\sqrt{k}\,\widetilde{\ell}_1\sin\sqrt{k}\,\widetilde{\ell}_3\cos\widetilde{\theta}_2 \qquad (k>0), \qquad (4.40)$$

$$\cosh\sqrt{|k|}\widetilde{\ell}_2 = \cosh\sqrt{|k|}\widetilde{\ell}_1\cosh\sqrt{|k|}\,\widetilde{\ell}_3 - \sinh\sqrt{|k|}\,\widetilde{\ell}_1\sinh\sqrt{|k|}\,\widetilde{\ell}_3\cos\widetilde{\theta}_2 \qquad (k<0). \qquad (4.41)$$

注意 (1) これらの公式において $k \to 0$ とし，両辺をテイラー展開して k の係数を比較することによって，$k=0$ の場合の余弦公式が得られる．また (4.40) を認めて，$k<0$ の場合に $\sqrt{k} = \sqrt{-1}\sqrt{-k}$ と考え，$\cos\sqrt{-1}\sqrt{-k}x$ を $\cosh\sqrt{-k}x$ に，$\sin\sqrt{-1}\sqrt{-k}x$ を $\sqrt{-1}\sinh\sqrt{-1}x$ に代えて公式 (4.41) が得られる．(実際このような考察は，Lobachevski による非ユークリッド幾何の発見においてなされた．)

(2) 上述の $\mathbf{M}_k$ における測地三角形 $\triangle\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$ に対して，正弦公式

$$\frac{f_k(\widetilde{\ell}_1)}{\sin\theta_1} = \frac{f_k(\widetilde{\ell}_2)}{\sin\theta_2} = \frac{f_k(\widetilde{\ell}_3)}{\sin\theta_3}$$

が成り立つ．実際，$\alpha(t)$ を $\operatorname{grad}\widetilde{r}$ と $\widetilde{c}'(t)$ のなす角とし，$\widetilde{\ell}(t) = \widetilde{r}(\widetilde{c}(t))$ とおく．$\widetilde{\ell}'(t) = \cos\alpha(t)$, したがって $\widetilde{\ell}''(t) = -\alpha'(t)\sin\alpha(t)$ であるが，一方 $\nabla d\widetilde{r} = (f_k'(\widetilde{r})/f_k(\widetilde{r}))(g_k - d\widetilde{r}\otimes\widetilde{r})$ より，

$$\widetilde{\ell}''(t) = (f_k'(\widetilde{\ell}(t))/f_k(\widetilde{\ell}(t)))(1-\cos^2\alpha(t))$$

となる．これらから，

$$f_k(\widetilde{\ell}(t))\alpha'(t) + f_k'(\widetilde{\ell}(t))\sin\alpha(t) = 0$$

を得る．このように $(f_k(\widetilde{\ell}(t))\sin\alpha(t))' = 0$, すなわち $f_k(\widetilde{\ell}_2))\sin\widetilde{\theta}_3 = f_k(\widetilde{\ell}_3)\sin\widetilde{\theta}_2$

が従う．

さて今度は，一般の完備リーマン多様体 (M,g) を考える．まず M の測地三角形の意味を明確にしておこう．**測地三角形**とは，頂点とよばれる異なる三点 p_1，p_2，p_3 と辺 $\overline{p_{i+1}p_{i+2}}$ とよばれる p_{i+1} と p_{i+2} を結ぶ最短測地線 $c_i : [0,\ell_i] \to M$ の組 ($i=1,2,3$ で 3 を法として考える) のことである．点 p_i での二つの接ベクトル $c_{i+2}'(0)$ と $-c_{i+1}'(\ell_{i+1})$ のなす角を頂点 p_i における角とよび，θ_i で表す (図 4.5)．

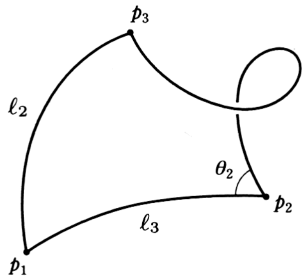


図 4.5

以下，すべての接平面 Σ に対して，その断面曲率 $K(\Sigma)$ は定数 k 以上であるとする．また，点 p_1 からの距離 (関数) を r とおき，点 p_2 を始点，点 p_3 を終点とする正規測地線 $c(t)=c_1(t)$ $(0 \leqq t \leqq \ell_1)$ を考え，区間 $[0,\ell_1]$ 上の関数 $\xi(t)$ を $\xi(t)=h_k(r(c(t)))$ によって定義する．r は点 p_1 とその最小跡 $\mathcal{C}(p_1)$ において滑らかではないので，ここでは $U_{p_1}=M\setminus\mathcal{C}(p_1)$ とおいて，$c(t)\in U_{p_1}$ $(0\leqq t\leqq \ell_1)$，つまり正規測地線 c は $\mathcal{C}(p_1)$ と交わることはないと仮定して議論する．このとき，定理 4.16 (2) より，U_{p_1} において r は $\nabla dr \leqq (f_k'(r)/f_k(r))(g-dr\otimes dr)$ を満たし，したがって $\nabla dh_k(r)\leqq(1-kh_k(r))g$ が成り立つ．これから，$\xi(t)$ は次の微分不等式と初期条件を満たすことがわかる:

$$\begin{cases} \xi''(t)+k\xi \leqq 1, \\ \xi(0)=\dfrac{1}{k}(1-f_k'(\ell_3)), \quad \xi'(0)=-f_k(\ell_3)\cos\theta_2. \end{cases}$$

(ここで $k=0$ のときは，$\xi(0)=(1/2){\ell_3}^2$，$\xi'(0)=-\ell_3\cos\theta_2$ と理解している．)

以上で，測地三角形 $\triangle p_1p_2p_3$ と単連結空間形 $\mathbf{M}_k$ の測地三角形 $\triangle \widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$ を比較する準備が整った．そのために $\ell_1=\widetilde{\ell}_1$，$\ell_3=\widetilde{\ell}_3$，$\theta_2=\widetilde{\theta}_2$ と仮定する．

このとき，$\xi_k(t)-\xi(t)$ は

$$\begin{cases} (\xi_k-\xi)''(t)+k(\xi_k-\xi)(t) \geqq 0 & (0 \leqq t \leqq \ell_1), \\ (\xi_k-\xi)(0)=0, (\xi_k-\xi)'(0)=0 \end{cases}$$

を満たす．これから

$$\xi_k(t)-\xi(t) \geqq 0 \qquad (0 \leqq t \leqq \ell_1) \tag{4.42}$$

が従う．この検証は後にまわすことにする．ここで h_k は，$[0,R)$ (ただし $R=\pi/\sqrt{k}$ $(k>0)$，$R=+\infty$ $(k \leqq 0)$) において単調増加関数であることに注意すると，$r(c(t)) \leqq r_k(\widetilde{c}(t))$，すなわち，

$$d_g(p_1, c(t)) \leqq d_g(\widetilde{p}_1, \widetilde{c}(t)) \qquad (0 \leqq t \leqq \ell_1)$$

が従う．よって $t=\ell_1$ として $\ell_2 \leqq \widetilde{\ell}_2$ となる．さらに余弦公式 (4.39), (4.40), (4.41) により，

$$\cos\sqrt{k}\,\ell_2 \geqq \cos\sqrt{k}\,\ell_1 \cos\sqrt{k}\,\ell_3 + \sin\sqrt{k}\,\ell_1 \sin\sqrt{k}\,\ell_3 \cos\theta_2 \qquad (k>0), \tag{4.43}$$

$${\ell_2}^2 \leqq {\ell_1}^2 + {\ell_3}^2 - 2\ell_1\ell_3\cos\theta_2 \qquad (k=0), \tag{4.44}$$

$$\cosh\sqrt{|k|}\,\ell_2 \leqq \cosh\sqrt{|k|}\,\ell_1 \cosh\sqrt{|k|}\,\ell_3 - \sinh\sqrt{|k|}\,\ell_1 \sinh\sqrt{|k|}\,\ell_3 \cos\theta_2 \qquad (k<0) \tag{4.45}$$

が成り立つ．

これらの評価式は，測地三角形 $\triangle\, p_1p_2p_3$ が最小跡に交わることはないという仮定のもとで導いた．しかしこの制限がなくても成り立つ大域的結果であることが知られている (ここでは証明しないが，上の議論における $\xi(t)$ が広い意味で同様の微分不等式を満たすことがわかる)．すなわち，次の**トポノゴフの比較定理**が成り立つ．

定理 4.17 完備リーマン多様体 (M,g) において，すべての断面曲率が定数 k 以上であるとする．M の測地三角形 $\triangle\, p_1p_2p_3$ と定曲率 k の単連結空間形 $\mathbf{M}_k$ の測地三角形 $\triangle\, \widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3$ を考える．辺 $\overline{p_{i+1}p_{i+2}}$ $(i=1,2,3)$ の長さを ℓ_i，頂点 p_i での角を θ_i とし，対応して，辺 $\overline{\widetilde{p}_{i+1}\widetilde{p}_{i+2}}$ の長さを $\widetilde{\ell}_i$，頂点 $\widetilde{p}_i$ での角を $\widetilde{\theta}_i$ とおく．このとき次のことが成り立つ．

(1) $\ell_1 = \widetilde{\ell}_1, \ell_3 = \widetilde{\ell}_3, \theta_2 = \widetilde{\theta}_2$ ならば，$\ell_2 \leqq \widetilde{\ell}_2$ である．(したがって，評価式 (4.43), (4.44), (4.45) が成り立つ．)

(2) $\ell_i = \widetilde{\ell}_i \ (i = 1, 2, 3)$ ならば，$\theta_i \geqq \widetilde{\theta}_i \ (i = 1, 2, 3)$ となる．

なお (2) の主張の証明は (1) から容易に導くことができるので練習問題とする．

式 (4.42) の証明 $\theta_2 < \widetilde{\theta}_2$ を仮定して示せばよい (実際 $\widetilde{\theta}_2 \to \theta_2$ として求める場合が従う)．このとき，$\eta(t) = \xi_k(t) - \xi(t) \ (0 \leqq t \leqq \ell_1)$ は，$\eta''(t) + k\eta(t) \geqq 0, \eta(0) = 0, \eta'(0) > 0$ を満たす．これから，$k \leqq 0$ のとき，η は単調増加な凸関数であることをみるのはやさしい．したがって $\eta > 0$ である．

次に $k > 0$ の場合を考える．簡単のため $k = 1$ とする．十分小さな正数 ε を一つ選び，$\rho_\varepsilon(t) = \sin(t + 2\varepsilon) - \sin\varepsilon$ とおく．区間 $[0, \ell_1 \wedge (\pi - 3\varepsilon))$ において，$(\eta/\rho_\varepsilon)''$ を計算すると，$\eta'' + \eta \geqq 0$ より，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\eta(t)}{\rho_\varepsilon(t)}\right)'' &= \frac{\eta''(t) + \eta(t)}{\rho_\varepsilon(t)} + (\sin\varepsilon)\frac{\eta(t)}{\rho_\varepsilon(t)^2} - 2\frac{\rho_\varepsilon{}'(t)}{\rho_\varepsilon(t)}\left(\frac{\eta(t)}{\rho_\varepsilon(t)}\right)' \\ &\geqq (\sin\varepsilon)\frac{\eta(t)}{\rho_\varepsilon(t)^2} - 2\frac{\rho_\varepsilon{}'(t)}{\rho_\varepsilon(t)}\left(\frac{\eta(t)}{\rho_\varepsilon(t)}\right)'\end{aligned}$$

となる．ここで，ある $t_0 \ (\in (0, \ell_1 \wedge (\pi - 3\varepsilon))$ において，$\eta(t_0) = 0$ と仮定する．このとき，ある $t_1 \ (\in [0, t_0])$ において η/ρ_ε は正の最大値をとる．したがって $(\eta/\rho_\varepsilon)'(t_1) = 0$ であるから，

$$\left(\frac{\eta}{\rho_\varepsilon}\right)''(t_1) \geqq (\sin\varepsilon)\frac{\eta(t_1)}{\rho_\varepsilon(t_1)^2} > 0$$

となり，η/ρ_ε が t_1 において最大値をとることに反する．

このようにして，$(0, \ell_1 \wedge (\pi - 3\varepsilon))$ において $\eta > 0$ であることが示された．$\varepsilon \to 0$ として，$[0, \ell_1]$ において $\eta \geqq 0$ が従う． ∎

4.7 曲線のエネルギー再説

曲線のエネルギー汎関数に関する 2 次微分を求める．ここに曲率が深く関わってくる．応用としてシンジの定理を証明する．

4.7.1 第二変分公式

リーマン多様体 (M, g) の C^∞ 級曲線 $c : [a, b] \to M$ とその C^∞ 級変分 $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を考える．c に沿う変分ベクトル場 $dH(\partial/\partial s)$ を

$V(t)$ とおく．各パラメータ s に対して $c_s(t) = H(t,s)$ とおき，曲線 c_s のエネルギー $E(c_s)$ の $s=0$ での 1 次微分を求め，さらに 2 次微分を計算する．まず $dE(c_s)/ds$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{dE(c_s)}{ds} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{ds} g\left(\frac{dc_s}{dt}, \frac{dc_s}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{\partial s} dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) dt\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}& g\left(\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt} g\left(dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) - g\left(dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\end{aligned}$$

を使って，次の曲線のエネルギーに関する第一変分公式 (1.16)

$$\frac{dE(c_s)}{ds}(s=0) = g(V(b), c'(b)) - g(V(a), c'(a)) - \int_a^b g\left(V(t), \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right) dt$$

が導かれる．

次に，$d^2E(c_s)/ds^2$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d^2E(c_s)}{ds^2} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\ &\qquad + g\left(\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \frac{D}{\partial s} dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\ &\qquad + g\left(\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right) dt\end{aligned}$$

となる．ここでリーマン計量 g の曲率テンソルを R とすれば，

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) =& \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \\ &+ R\left(dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\end{aligned}$$

となる．さらに

$$g\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}g\left(\frac{D}{\partial s}dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) - g\left(\frac{D}{\partial s}dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \frac{D}{\partial t}dH\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)$$

より，

$$\mathcal{S}(t) = \frac{D}{\partial s}dH\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)(s=0)$$

とおいて，$d^2E(c_s)/ds^2(s=0)$ を求めると，

$$\frac{d^2E(c_s)}{ds^2}(s=0) = g(\mathcal{S}(b), c'(b)) - g(\mathcal{S}(a), c'(a)) + \int_a^b g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right) - g(R(V,c')c', V) - g\left(\mathcal{S}, \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right)dt$$

となる．とくに c が測地線のときには，

$$\frac{d^2E(c_s)}{ds^2}(s=0) = g(\mathcal{S}(b), c'(b)) - g(\mathcal{S}(a), c'(a)) + \int_a^b g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right) - g(R(V,c')c', V)\,dt. \quad (4.46)$$

これを測地線のエネルギーに関する**第二変分公式**という．ここで命題 1.5 にあわせて，この第二変分公式を述べておく．

命題 4.18　リーマン多様体 (M,g) において，測地線 $c(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ が与えられているとする．

(1) c の両端の点 $c(a)$ と $c(b)$ を固定する c の C^∞ 級変分 $H(t,s)$ $(a \leqq t \leqq b, |s| < \varepsilon)$ に対して，

$$\frac{d^2E(c_s)}{ds^2}(s=0) = \int_a^b g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right) - g(R(V,c')c', V)\,dt$$

が成り立つ．ただし V は c に沿う H による変分ベクトル場を表す．

(2) c が閉測地線のとき，$H(a,s) = H(b,s)$ $(|s| < \varepsilon)$ を満たす C^∞ 級変分 H に対して，

$$\frac{d^2E(c_s)}{ds^2}(s=0) = \int_a^b g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right) - g(R(V,c')c', V)\,dt$$

が成り立つ．

(3) N_1, N_2 をそれぞれ M の部分多様体で，$c(a) \in N_1$, $c(b) \in N_2$, さらに c はそれぞれと直交しているとする．$H(a,s) \in N_1$，$H(b,s) \in N_2$ ($|s| < \varepsilon$) を満たす C^∞ 級変分 H に対して，

$$\frac{d^2E(c_s)}{ds^2} = g(\mathcal{S}^{(2)}(V(b)), c'(b)) - g(\mathcal{S}^{(1)}(V(a)), c'(a)) + \int_a^b g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right) - g(R(V,c')c', V)\, dt$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{S}^{(1)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$ はそれぞれ N_1, N_2 の点 $c(a)$, $c(b)$ での単位法ベクトル $c'(a)$, $c'(b)$ に関するシェイプ作用素を表す．(ここで N_1 あるいは N_2 は一点でもよい．この場合シェイプ作用素は 0 であると理解する．ともに一点である場合が (1) の場合にあたる．)

4.7.2 指数補題とその応用

まず，指数補題とよばれる基本的な事実 (命題 4.19) を証明する．次にその応用として，前節で主張した評価式 (4.34)～(4.38)，そして証明なしで述べた命題 3.21 を，命題 4.21 として証明する．

測地線 $c : [a,b] \to M$ に沿うベクトル場の組 (X,Y) に対して

$$I_c(X,Y) = \int_a^b g\left(\frac{DX}{dt}, \frac{DY}{dt}\right) - g(R(X,c')c', Y)\, dt$$

とおく．このとき，I_c は $\mathcal{X}_c(M)$ 上の対称双線形形式を定義する．c に沿うヤコビ場 J に対して，$D^2J/dt^2 + R(J,c')c' = 0$ より

$$I_c(J,J) = \int_a^b g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt}\right) + g\left(\frac{D^2J}{dt^2}, J\right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} g\left(\frac{DJ}{dt}, J\right) dt$$

となり，したがって

$$I_c(J,J) = g\left(\frac{DJ}{dt}(b), J(b)\right) - g\left(\frac{DJ}{dt}(a), J(a)\right)$$

となる．

命題 4.19 点 p を始点とする測地線 $c : [a,b] \to M$ に対して，c に沿う点 $p = c(a)$ の共役点がないとする．X を c に沿うベクトル場で，$X(a) = 0$ かつ c に直交する (すなわち $g(X(t), c'(t)) = 0$ ($0 \leqq t \leqq b$) を満たす) ものとし，

J を c に沿うヤコビ場で，$J(a)=0$, $J(b)=X(b)$ を満たすものとする．このとき，

$$I_c(J,J) \leqq I_c(X,X)$$

が成り立つ．さらに等号は，X と J が一致するとき，かつそのときに限り成り立つ．

証明の前に次の補題を用意しておく．

補題 4.20 測地線 c に沿うヤコビ場 J, $\widetilde{J}$ に対して，

$$g(J, D\widetilde{J}/dt) - g(DJ/dt, \widetilde{J})$$

は $t \in [a,b]$ によらず一定である．さらに，ある $\tau \in [a,b]$ において $J(\tau) = \widetilde{J}(\tau) = 0$ ならば，区間 $[a,b]$ において，

$$g(J, D\widetilde{J}/dt) = g(DJ/dt, \widetilde{J})$$

である．

証明 まず

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g\left(J, \frac{D\widetilde{J}}{dt}\right) &= g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{D\widetilde{J}}{dt}\right) + g\left(J, \frac{D^2\widetilde{J}}{dt^2}\right) \\
&= g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{D\widetilde{J}}{dt}\right) - g(J, R(\widetilde{J}, c')c') \\
&= g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{D\widetilde{J}}{dt}\right) - g(\widetilde{J}, R(J, c')c') \\
&= \frac{d}{dt} g\left(\frac{DJ}{dt}, \widetilde{J}\right)
\end{aligned}$$

となる．これより補題の主張は明らかである． ∎

命題 4.19 の証明 $J(a)=0$ を満たし，c に直交するヤコビ場全体を $\mathcal{J}_0^{\perp}(c)$ と記す．これは $(m-1)$ 次元ベクトル空間であるが，その基底 $\{J_1, \ldots, J_{m-1}\}$ を一つとる．c に沿って点 p の共役点がないことから，各径数 t $(a \leqq t \leqq b)$ に対して，$\{J_1(t), \ldots, J_{m-1}(t)\}$ は接空間 $T_{c(t)}M$ での $c'(t)$ の直交補空間の基底となる．よって $X(a)=0$ を満たし，c に直交するベクトル場 X は，$X(t) = \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)J_i(t)$ と一意的に表される．ただし，各 f_i は $[a,b]$ 上の C^{∞} 級関数である．また，$\beta_i = f_i(b)$ $(i=1,\ldots,m-1)$ とおくと，$J(b)=X(b)$ を満たすヤコビ場は $J = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i J_i$ である．

さて，直接計算することにより，

$$
\begin{aligned}
&g\left(\frac{DX}{dt},\frac{DX}{dt}\right)-g(R(X,c')c',X)\\
&=g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{k=1}^{m-1}f_k'J_k\right)+\frac{d}{dt}g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_iJ_i,\sum_{k=1}^{m-1}f_k\frac{DJ_k}{dt}\right)\\
&\quad+g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{k=1}^{m-1}f_k\frac{DJ_k}{dt}\right)-g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_iJ_i,\sum_{k=1}^{m-1}f_k'\frac{DJ_k}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで補題 4.20 より

$$
\begin{aligned}
&g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{k=1}^{m-1}f_k\frac{DJ_k}{dt}\right)-g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_iJ_i,\sum_{k=1}^{m-1}f_k'\frac{DJ_k}{dt}\right)\\
&\qquad=\sum_{i,k=1}^{m-1}f_i'f_k\left\{g\left(J_i,\frac{DJ_k}{dt}\right)-g\left(\frac{DJ_i}{dt},J_k\right)\right\}\\
&\qquad=0
\end{aligned}
$$

となり，したがって，

$$
\begin{aligned}
I_c(X,X)&=g\left(X(b),\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i\frac{DJ_i}{dt}(b)\right)+\int_a^b g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i\right)dt\\
&=g\left(J(b),\frac{DJ}{dt}(b)\right)+\int_a^b g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i\right)dt\\
&=I_c(J,J)+\int_a^b g\left(\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i,\sum_{i=1}^{m-1}f_i'J_i\right)dt
\end{aligned}
$$

が導かれる．これから命題の主張は明らかである． ∎

式 (4.34)〜(4.38) の証明　まず仮定を思い出そう．ある C^∞ 級関数 $\underline{k}(t)$ があって，

"$c_v'(t)$ を含む接平面 Σ の断面曲率 $K(\Sigma)\geqq\underline{k}(t)$ $(0<t<\infty)$."

$\mathcal{J}_0^\perp(c_v)$ の元 J と $0<T<\sigma(v)\wedge\tau(\underline{k})$ を満たす T に対して，$E(t)$ を，$E(T)=J(T)$ である c_v に沿って平行なベクトル場とし，$X(t)=(f_{\underline{k}}(t)/f_{\underline{k}}(T))E(t)$ とおく．命題 4.20 より，$I_{c_v|[0,T]}(J,J)\leqq I_{c_v|[0,T]}(X,X)$ である．したがって，(4.32) に注意して，

$$
\begin{aligned}
\|J(T)\|\,\|J\|'(T)&=g\left(\frac{DJ}{dt}(T),J(T)\right)\\
&=I_{c_v|[0,T]}(J,J)\\
&\leqq I_{c_v|[0,T]}(X,X)\\
&=\frac{1}{f_{\underline{k}}(T)^2}\int_0^T(f_{\underline{k}}')^2g(E,E)-f_{\underline{k}}{}^2g(R(E,c_v')c_v',E)\,dt\\
&=\frac{\|J(T)\|^2}{f_{\underline{k}}(T)^2}\int_0^T(f_{\underline{k}}')^2-f_{\underline{k}}{}^2K(E,c_v')\,dt
\end{aligned}
$$

となる．ここで仮定 $K(E(t),c_v{}'(t)) \geqq \underline{k}(t)$ を使って，

$$\begin{aligned}\|J(T)\|\,\|J\|'(T) &\leqq \frac{\|J(T)\|^2}{f_{\underline{k}}(T)^2}\int_0^T (f_{\underline{k}}{}')^2 - f_{\underline{k}}{}^2\underline{k}\,dt \\ &= \frac{\|J(T)\|^2}{f_{\underline{k}}(T)^2}\int_0^T (f_{\underline{k}}{}')^2 + f_{\underline{k}}f_{\underline{k}}{}''\,dt \\ &= \frac{\|J(T)\|^2}{f_{\underline{k}}(T)^2}\int_0^T (f_{\underline{k}}{}'f_{\underline{k}})'\,dt \\ &= \frac{\|J(T)\|^2}{f_{\underline{k}}(T)^2}\,f_{\underline{k}}{}'(T)f_{\underline{k}}(T) \\ &= \|J(T)\|^2\frac{f_{\underline{k}}{}'(T)}{f_{\underline{k}}(T)}\end{aligned}$$

となる．よって，区間 $(0,\sigma(v)\wedge\tau(\underline{k}))$ において，$\|J\|'(t)/\|J\|(t) \leqq f_{\underline{k}}{}'(t)/f_{\underline{k}}(t)$ が成り立つことがわかった．これから $\|J\|(t)/f_{\underline{k}}(t)$ が単調減少，すなわち，

$$\frac{\|J\|(s)}{f_{\underline{k}}(s)} \geqq \frac{\|J\|(t)}{f_{\underline{k}}(t)} \qquad (0<s<t<\sigma(v)\wedge\tau(\underline{k}))$$

が従う．ここで $s\to 0$ として，左辺は $\|DJ/dt(0)\|$ に収束するので，

$$\|J\|(t) \leqq \left\|\frac{DJ}{dt(0)}\right\| f_{\underline{k}}(t) \qquad (0<t<\sigma(v)\wedge\tau(\underline{k})).$$

これから $\sigma(v) \leqq \tau(\underline{k})$ は明らかであり，残りの主張 (4.35)～(4.38) も示されたことになる． ∎

命題 4.21　点 p を始点とする測地線 $c:[a,b]\to M$ に対して，点 $p=c(a)$ の c に沿う共役点が存在すると仮定する．このとき，ある区分的に C^∞ 級の c の変分 $H:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ があって，$c_s(t)=H(t,s)$ とおくと

$$c_s(a)=c(a),\ c_s(b)=c(b),\ L(c_s)<L(c) \qquad (0<s<\varepsilon)$$

となる．したがって $c:[a,b]\to M$ は最短線ではない．

証明　$c(\tau)$ が p の共役点とし，J を c に沿う自明でないヤコビ場で，$J(a)=0$ かつ $J(\tau)=0$ を満たすものとする．このようなヤコビ場 J に対して，$g(J(t),c'(t))=0$ $(a\leqq t\leqq b)$ および $DJ/dt(\tau)\neq 0$ が成り立つ．

次に，$Z(\tau)=-DJ/dt(\tau)$ を満たす c に沿う平行なベクトル場 Z をとり，さらに $f(a)=f(b)=0$，そして $f(\tau)=1$ を満たす区間 $[a,b]$ 上の C^∞ 級関数 f をとり，c に沿うベクトル場 V_α を

$$V_\alpha(t)=\begin{cases} J(t)+\alpha f(t)Z(t) & (0\leqq t<\tau) \\ \alpha f(t)Z(t) & (\tau\leqq t\leqq b)\end{cases}$$

によって定める．ただし α は定数で，あとで十分小さく選ぶことになる．さらに V_α を変分ベクトル場とする区分的に C^∞ 級の変分 $H : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を $H(t,s) = \exp_{c(t)} sV_\alpha(t)$ によって定義する．このとき，曲線のエネルギーに関する第二変分公式 (4.46) を使って，曲線 $c_s(t) = H(t,s)$ のエネルギー $E(c_s)$ の $s=0$ での 2 次微分を計算する．少し長くなるが，式変形を丁寧に述べると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{ds^2}E(c_s)(s=0)\\
&= \frac{d^2}{ds^2}E(c_{s|[a,\tau]})(s=0) + \frac{d^2}{ds^2}E(c_{s|[\tau,b]})(s=0)\\
&= \int_a^\tau g\left(\frac{DJ}{dt} + \alpha f'Z, \frac{DJ}{dt} + \alpha f'Z\right) - g(R(J+\alpha fZ, c')c', J+\alpha fZ)\,dt\\
&\quad + \int_b^\tau g(\alpha f'Z, \alpha f'Z) - g(R(\alpha fZ, c')c', \alpha fZ)\,dt\\
&= \int_a^\tau g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt}\right) - g(R(J,c')c', J)\,dt\\
&\quad + 2\alpha\int_a^\tau g\left(f'Z, \frac{DJ}{dt}\right) - g(R(J,c')c', fZ)\,dt\\
&\quad + \alpha^2\int_a^b g(f'Z, f'Z) - g(R(fZ,c')c', fZ)\,dt\\
&= \int_a^\tau g\left(\frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt}\right) + g\left(\frac{D^2J}{dt^2}, J\right)dt\\
&\quad + 2\alpha\int_a^\tau g\left(f'Z, \frac{DJ}{dt}\right) + g\left(\frac{D^2J}{dt^2}, fZ\right)dt\\
&\quad + \alpha^2\int_a^b g(f'Z, f'Z) - g(R(fZ,c')c', fZ)\,dt\\
&= \int_a^\tau \frac{d}{dt}g\left(\frac{DJ}{dt}, J\right)dt + 2\alpha\int_a^\tau \frac{d}{dt}g\left(\frac{DJ}{dt}, fZ\right)dt\\
&\quad + \alpha^2\int_a^b g(f'Z, f'Z) - g(R(fZ,c')c', fZ)dt\\
&= g\left(\frac{DJ}{dt}(\tau), J(\tau)\right) - g\left(\frac{DJ}{dt}(a), J(a)\right)\\
&\quad + 2\alpha\left(g\left(\frac{DJ}{dt}(\tau), f(\tau)Z(\tau)\right) - g\left(\frac{DJ}{dt}(a), f(a)Z(a)\right)\right)\\
&\quad + \alpha^2\int_a^b g(f'Z, f'Z) - g(R(fZ,c')c', fZ)\,dt\\
&= -2\alpha g\left(\frac{DJ}{dt}(\tau), \frac{DJ}{dt}(\tau)\right) + \alpha^2\int_a^b g(f'Z, f'Z) - g(R(fZ,c')c', fZ)\,dt
\end{aligned}
$$

となる．したがって，定数 α を十分小さく選んでおけば，$(d^2/ds^2)E(c_s)(s=0)<0$ が導かれる．これから $(d/ds)E(c_s)(s=0)=0$ に注意すれば，十分小さな正数 ε に対して，$E(c_s)<E(c)$ $(0<s<\varepsilon)$ となる．さらに長さ $L(c_s)$ $(0<s<\varepsilon)$ についてみると，

$$L(c_s)^2 \leqq 2(b-a)E(c_s) < 2(b-a)E(c) = L(c)^2$$

となる (1.5 節参照)．以上で命題 4.21 が示された． ∎

4.7.3 第二変分公式の応用

閉測地線の存在とそれに関する第二変分公式 (4.46) の応用を示す．まず M の区分的 C^∞ 級の曲線 $\gamma\colon[a,b]\to M$ に対して，その長さ $L(\gamma)$ は次のように与えられることに注意する:

$$L(\gamma)=\sup\left\{\sum_{i=0}^{k-1} d_g(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1})) \;\middle|\; a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b\right\}. \tag{4.47}$$

ここで上限は区間の分割すべてにわたってとる．

さて，区間 $[0,1]$ から M への連続閉曲線からなる自由ホモトピー類 α (2.5.4 項の注意参照) に対して，

$$\ell=\inf\{L(\gamma)\mid \gamma\in\alpha,\ \gamma \text{ は区分的に } C^\infty \text{ 級である }\}$$

とおく．このとき，$L(\gamma)=\ell$ となる γ が存在するであろうか．もし存在すれば，(4.47) からわかるように，γ は閉じた局所最短線，すなわち閉測地線となるであろう．このような γ の存在について考えたい．その長さが ℓ に収束する α に属する区分的 C^∞ 級ループの列 $\{\gamma_n\}$ をとる．長さはパラメータの変換で変わらないので，各 γ_n は速さ $L(\gamma_n)$ の定速曲線としてよい．また $L(\gamma_n)\leqq 2\ell$ としてよい．このとき，

$$\begin{aligned} d_g(\gamma_n(s),\gamma_n(t)) &\leqq \int_s^t \sqrt{g(\gamma_n'(u),\gamma_n'(u))}\,du \\ &= L(\gamma_n)|s-t| \\ &\leqq 2\ell|s-t| \qquad (0\leqq s,t\leqq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．このように明らかに $\{\gamma_n\}$ は同等連続である．ここで M がコン

パクトであると仮定すると，アスコリ・アルツェラの定理を適用することができる．したがって，必要ならば部分列をとることによって，γ_n はある連続閉曲線 γ に一様収束するとしてよい．すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{d_g(\gamma_n(t), \gamma(t)) \mid 0 \leqq t \leqq 1\} = 0$$

とする．γ も α に属する元であるが，α において最短の長さ ℓ の閉測地線であることを以下において示そう．

まず $[0,1]$ の分割 $\{t_i \mid t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = 1\}$ を考える．分割の最大幅 $\max\{|t_i - t_{i-1}| \mid i = 1, \ldots, k\}$ を十分小さくしておくと，各 i に対して，$\gamma_{|[t_{i-1}, t_i]}$ は点 $\gamma(t_{i-1})$ を中心とする正規近傍に含まれる．そこで $\gamma(t_{i-1})$ と $\gamma(t_i)$ を結ぶ最短測地線を σ_i とする．$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ を順次つないでできる区分的 C^∞ 級曲線を σ とおけば，その作り方より σ も α に属し，

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} d_g(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$$

となる．ここで γ_n は γ に一様収束しているので，任意の正数 ε と十分大きな n に対して，$d_g(\gamma(t), \gamma_n(t)) < \varepsilon$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ としてよい．このとき，

$$\begin{aligned}
L(\sigma) &= \sum_{i=0}^{k-1} d_g(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\
&\leqq \sum_{i=0}^{k-1} \{d_g(\gamma(t_i), \gamma_n(t_i)) + d_g(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i+1}) + d_g(\gamma_n(t_{i+1}), \gamma(t_{i+1}))\} \\
&\leqq 2k\varepsilon + \sum_{i=0}^{k-1} d_g(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i+1})) \\
&\leqq 2k\varepsilon + L(\gamma_n)
\end{aligned}$$

となる．ここで $n \to \infty$ とすれば，

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} d_g(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leqq k\varepsilon + \ell,$$

そしてさらに $\varepsilon \to 0$ として，

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} d_g(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leqq \ell$$

となる．一方，ℓ の定義から，$\ell \leqq L(\sigma)$ より，

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} d_g(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = \ell$$

となる．これが分割幅の小さいすべての分割に対して成り立つので，γ は長さ ℓ の局所最短線，すなわち測地線で，その長さも ℓ に等しいことがわかる．

ここで曲線の長さ L の代わりに曲線のエネルギー E を考え，上の議論をエネルギーに関して実行しても同様に，自由ホモトピー類 α において，γ は最小のエネルギーの閉測地線であることが示される (1.5 節参照).

さて，このような閉測地線 γ に沿う平行移動

$$\Pi = \Pi(\gamma; 0, 1) : T_pM \to T_pM \qquad (p = \gamma(0) = \gamma(1))$$

を考える．Π は $c'(0) = c'(1)$ の直交補空間 $\{c'(0)\}^{\perp}$ からそれ自身への線形等長変換を定義する．さらに，M は向き付けられていると仮定すると，Π は向きを保つ．よって M が偶数次元，すなわち $\{c'(0)\}^{\perp}$ が奇数次元のとき，$\Pi(v) = v$ を満たす $\{c'(0)\}^{\perp}$ の 0 でないベクトル v が存在する．v を γ に沿って平行移動してできる γ に沿うベクトル場を $V(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とする．十分小さな s に対して，$H(t,s) = \exp sV(t)$，$\gamma_s(t) = H(t,s)$ とおくと，H は γ の C^{∞} 級変分を与える．エネルギー $E(\gamma_s)$ は $s=0$ で最小値をとるので，$d^2E(\gamma_s)/ds^2(s=0) \geqq 0$ でなければならない．したがって，$V(t)$ が平行であることに注意して，第二変分公式 (4.46) を適用すると，

$$\frac{d^2E(\gamma_s)}{ds^2}(s=0) = \int_0^1 -K(c'(t), v(t))\, dt \geqq 0$$

となる．したがって，もし M の断面曲率がいたるところ正であれば，このようなことはおきない．これは上に述べた仮定を満たすリーマン多様体 (M,g) において，自由ホモトピー類は自明となり，M が単連結であることを意味する．

以上の考察を定理としてまとめる．

定理 4.22　コンパクト連結リーマン多様体 (M,g) に対して，次の (1), (2) が成り立つ．

(1) 閉曲線からなる自明でない任意の自由ホモトピー類の中に閉測地線が存在する．

(2) M は向き付け可能で，次元は偶数であるとする．さらにすべての接平面に対して，その断面曲率が正であれば，M は単連結でなければならない．

この定理の二番目の結果は，**シンジの定理**である．

注意 コンパクトでない多様体に対しては，図 4.6 のような無限に長いスパイクをもつ曲面が示唆するように，(1) の主張は必ずしも成り立たない．また (2) の主張においても，実射影空間やレンズ空間 (2.5.4 項参照) が示すように，向き付け可能性と次元の条件は本質的である．

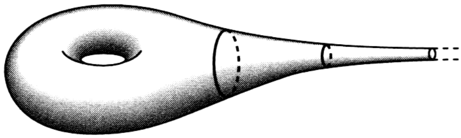


図 4.6

4.8 微分形式とラプラス作用素

m 次元多様体 M において，微分形式に作用する外微分作用素 $d : A(M) \to A(M)$ は $d \circ d = 0$ を満たすので，t 次完全形式のなすベクトル空間 $B^t(M)$ は t 次閉形式のなすベクトル空間 $Z^t(M)$ の部分空間となる．商空間 $H^t_{\mathrm{deR}}(M) = Z^t(M)/B^t(M)$ を M の **t 次ドラームコホモロジー群**という．$t = 0$ の場合，$B^0(M) = \{0\}$ であり，$Z^0(M)$ の 元は M の各連結成分において定数となる関数のことであるから，$H^0_{\mathrm{deR}}(M)$ は M の連結成分の数だけの $\mathbf{R}$ の直積である．M が連結かつ単連結であれば，$Z^1(M) = B^1(M)$ より，$H^1_{\mathrm{deR}}(M) = \{0\}$ である (例題 3.6 参照)．ドラームの理論によれば，多様体のドラームコホモロジー群はホモトピー型不変量である，とくに位相不変量である．すなわち，二つの多様体 M と N に対して，連続写像 $f : M \to N$，$h : N \to M$ で，$h \circ f : M \to M$，$f \circ h : N \to N$ が M，N それぞれの恒等写像にホモトープとなるものが存在するとき，M と N はホモトピー同値といい，このとき M と N の対応するドラームコホモロジー群は同形である．実際，ドラームコホモロジー群には外積によって自然に多元環の構造がはいり，多元環としても同形である．このように，多様体の位相的性質に関する重要な情報を微分形式が表現することが知られている．

本節では，まず 1 次微分形式について考察する．そして一般の微分形式に対するホッジ・小平の定理を紹介し，ワイツェンベックの公式とその応用を示す．

4.8.1 1次ドラームコホモロジー類

m 次元コンパクト連結リーマン多様体 (M,g) とその上の1次微分形式の空間 $A^1(M)$ を考える．$A^1(M)$ において L^2 内積

$$(\omega,\eta)_{L^2}=\int_M(\omega,\eta)_g\,d\mu_g \qquad (\omega,\eta\in A^1(M))$$

を考える．($\wedge^t T_p^*M$ における内積 $(\ ,\ )_g$ の定義については3.3.3項参照．)

前節では，閉曲線からなる自明でない自由ホモトピー類から長さ，あるいはエネルギーの最小値を与える曲線の存在とそれが閉測地線であることをみた．また，その応用としてシンジの定理を示した．ここでは1次ドラームコホモロジー類に対しても L^2 ノルムに関して同様の考察をしよう．ただし，厳密には解析学の深い結果を必要とするので，ここではそれを認めて議論する．

1次ドラームコホモロジー類 $\alpha\in H^1_{\mathrm{deR}}(M)$ に対して，

$$\mathcal{E}(\alpha)=\inf\{\,\|\omega\|_{L^2}{}^2=(\omega,\omega)_{L^2}\mid\omega\in\alpha\}$$

とおく．この下限を実現する α を代表する元を求めたい．そのために，α を代表する元を一つ固定し，それを ω_0 と記す．このとき，$\mathcal{E}(\alpha)$ は M 上の C^∞ 級関数 f を動かすときの $\|\omega_0+df\|_{L^2}{}^2$ の下限に等しい．すなわち，

$$\mathcal{E}(\alpha)=\inf\{\|\omega_0+df\|_{L^2}{}^2\mid f\in C^\infty(M)\}$$

と表すことができる．この下限を実現する関数を求めよう．そのためにまず，1次微分形式全体のなす空間 $A^1(M)$ を L^2 内積によって完備化して得られるヒルベルト空間 $L^2(M,T^*M)$ を考える．この空間の元は局所座標系に関する成分が局所的に2乗可積分の関数であるような1次微分形式で，M 全体での L^2 ノルムが有限であるものとして理解できる．$B^1(M)$ の $L^2(M,T^*M)$ における閉包を H とおこう．このとき $\omega_0+H=\{\omega_0+\eta\mid\eta\in H\}$ は $L^2(M,T^*M)$ の凸閉部分集合であり，

$$\|\omega_0+\eta_\alpha\|_{L^2}=\inf\{\|\omega_0+\eta\|_{L^2}\mid\eta\in H\}$$

を満たす H の元 η_α が一意的に存在することを示すことができる．

次に $\lim_{n\to\infty}\|df_n-\eta_\alpha\|_{L^2}=0$ となる $C^\infty(M)$ の列 $\{f_n\}$ を考える．$\{df_n\}$ は L^2 ノルムに関してコーシー列である．さらに，必要ならば定数を加えるこ

とで，各 f_n は $\int_M f_n\,d\mu_g = 0$ を満たしているとしてよい．ここで

$$\lambda_1(M) = \inf\left\{ \frac{\|df\|_{L^2}{}^2}{\|f\|_{L^2}{}^2} \;\middle|\; f \in C^\infty(M),\ \int_M f\,d\mu_g = 0 \right\} \tag{4.48}$$

とおくと，M はコンパクトであることから，$\lambda_1(M) > 0$ であることが知られている．したがって，

$$\|f_\ell - f_n\|_{L^2} \leqq \lambda_1(M)^{-1}\|df_\ell - df_n\|_{L^2}$$

となり，$\{f_n\}$ も 2 乗可積分な関数のなすヒルベルト空間 $L^2(M)$ においてコーシー列である．したがって，ある可積分関数 f_α に L^2 収束する．すなわち，$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f_\alpha\|_{L^2} = 0$. また，$f_\alpha$ も $\int_M f_\alpha\,d\mu_g = 0$ を満たしている．したがって $A^1(M)$ の任意の元 ξ に対して，

$$\begin{aligned}\int_M (\eta_\alpha, \xi)_g\,d\mu_g &= \lim_{n\to\infty}\int_M (df_n, \xi)_g\,d\mu_g \\ &= \lim_{n\to\infty} -\int_M f_n \operatorname{div}\xi\;d\mu_g = -\int_M f_\alpha \operatorname{div}\xi\;d\mu_g\end{aligned}$$

となる．さらに任意の C^∞ 級関数 u に対して，変数 t の関数 $\|\omega_0+\eta_\alpha+t\,du\|_{L^2}{}^2$ は $t=0$ で最小値をとるので，$t=0$ における 1 次微分は消える．これから $\int_M (\omega_0 + \eta_\alpha, du)_g\,d\mu_g = 0$ が従う．よって $\xi = du$ として，$\Delta u = \operatorname{div}(du)$ より，f_α は

$$\int_M f_\alpha \Delta u + (\operatorname{div}\omega_0^\sharp)u\;d\mu_g = 0 \qquad (\forall u \in C^\infty(M))$$

を満たすことがわかる．ここで 2 階楕円型偏微分方程式に関する (弱解の) 正則性の結果を適用して，f_α は C^∞ 級であり，$\Delta f_\alpha + \operatorname{div}\omega_0^\sharp = 0$ を満たしていることがわかる．この f_α が求めるものである．いい換えると $\omega = \omega_0 + df_\alpha$ が α を代表し，$\mathcal{E}(\alpha)$ を実現する 1 次微分形式である．

4.8.2　ラプラス作用素の定義

リーマン多様体 (M,g) において，$(0,t+1)$ 次テンソル場 ω に対して，$t=1$ の場合と同様に $(0,t)$ 次テンソル場 $\operatorname{div}\omega$ を次のように定義する:

$$\operatorname{div}\omega(v_1,\ldots,v_t) = \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}\omega(e_i, v_1,\ldots,v_t) \quad (v_1,\ldots,v_t \in T_pM,\ p \in M).$$

ここで $\{e_1,\dots,e_m\}$ は T_pM の正規直交基底である．

次に，ベクトル場 X と $(0,t+1)$ 次テンソル場 ω に対して，$(0,t)$ 次テンソル場 $\iota_X\omega$ を

$$\iota_X\omega(v_1,\dots,v_t)=\omega(X_p,v_1,\dots,v_t) \qquad (v_1,\dots,v_t\in T_pM,\ p\in M)$$

によって定義する．このとき，次の恒等式が成り立つ．$(0,t+1)$ 次テンソル場 ω と $(0,t)$ 次テンソル場 η に対して，

$$\langle \operatorname{div}\omega,\eta\rangle_g+\langle\omega,\nabla\eta\rangle_g=\operatorname{div}F_{\omega,\eta}. \tag{4.49}$$

ここで $F_{\omega,\eta}$ は $F_{\omega,\eta}(X)=\langle\iota_X\omega,\eta\rangle_g$ $(X\in\mathcal{X}(M))$ によって定義される $(0,1)$ 次テンソル場である．

等式 (4.49) を検証しよう．M の点 p とその近傍で定義された正規直交標構場 $(E_1,\dots,E_m)$ をとる．$e_i=(E_i)_p$ $(i=1,\dots,m)$ とおく．計算を簡単にするために，$\nabla_{e_i}E_j=0$ $(i,j=1,\dots,m)$ とする (命題 3.16 参照)．この性質とテンソル場の内積の定義を思い出して，(4.49) の右辺の点 p での値を定義に従って求める．

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}F_{\omega,\eta}(p)&=\sum_{i=1}^m\nabla_{e_i}F_{\omega,\eta}(e_i) \ =\ \sum_{i=1}^m e_i(F_{\omega,\eta}(E_i))\\
&=\sum_{i=1}^m e_i\left(\sum_{j_*=1}^m\omega(E_i,E_{j_1},\dots,E_{j_t})\eta(E_{j_1},\dots,E_{j_t})\right)\\
&=\sum_{i,j_*=1}^m\{e_i(\omega(E_i,E_{j_1},\dots,E_{j_t}))\eta(e_{j_1},\dots,e_{j_t})\\
&\qquad\qquad+\omega(e_i,e_{j_1},\dots,e_{j_t})e_i(\eta(E_{j_1},\dots,E_{j_t}))\}\\
&=\sum_{i,j_*=1}^m\{\nabla_{e_i}\omega(e_i,e_{j_1},\dots,e_{j_t})\eta(e_{j_1},\dots,e_{j_t})\\
&\qquad\qquad+\omega(e_i,e_{j_1},\dots,e_{j_t})\nabla_{e_i}\eta(e_{j_1},\dots,e_{j_t})\}\\
&=\langle\operatorname{div}\omega,\eta\rangle_g+\langle\omega,\nabla\eta\rangle_g.
\end{aligned}$$

以上で (4.49) が確かめられた．

ここで定理 1.6 を適用して，次の命題を得る．

命題 4.23 リーマン多様体 (M,g) 上の $(0,t+1)$ 次テンソル場 ω と $(0,t)$ 次テンソル場 η に対して，コンパクトな滑らかな境界をもつ領域 A において，

次の恒等式が成り立つ:

$$\int_A \langle \omega, \nabla\eta\rangle_g + \langle \operatorname{div}\omega, \eta\rangle_g \, d\mu_g = \int_{bA} \langle \iota_\nu \omega, \eta\rangle_h \, d\mu_h$$

ここで $\nu\,(=\nu_{bA})$ は境界 bA の外向きの単位法ベクトル場を表し，h は bA 上の誘導計量を表す．また ω と η のいずれかの台がコンパクトならば，

$$\int_M \langle \omega, \nabla\eta\rangle_g \, d\mu_g = -\int_M \langle \operatorname{div}\omega, \eta\rangle_g \, d\mu_g$$

が成り立つ．

このように $-\operatorname{div}$ は $\mathcal{T}^0_{t+1}(M)$ から $\mathcal{T}^0_t(M)$ への 1 階の微分作用素であるが，台がコンパクトである共変テンソル場の空間に制限して考えると，共変微分 ∇ の (L^2 内積に関する) 形式的随伴作用素である．

さて次に M 上の微分形式を考える．$\omega \in A^{t+1}(M)$，$\eta \in A^t(M)$ に対して，$\delta\omega = -\operatorname{div}\omega$ は $A^t(M)$ の元であるが，$\nabla\eta$ は $A^{t+1}(M)$ の元ではないので，交代化する必要がある．たとえば $t=1$ の場合，

$$d\eta(X,Y) = (\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)$$

と外微分を表すことができた (3 章の例 6 参照)．同様に，一般の微分形式の外微分も，レビ・チビタ接続を用いて次のように表すことができる．

補題 4.24 $\eta \in A^t(M)$ に対して，

$$d\eta(X_0,\ldots,X_t) = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i \nabla_{X_i}\eta(X_0,\ldots,X_{i-1},\widehat{X_i},X_{i+1},\ldots,X_t) \qquad (X_0,\ldots,X_t \in \mathcal{X}(M)) \tag{4.50}$$

が成り立つ．ここで，$\widehat{X}_i$ と記されたところは削除を意味している．

これは次のようにいい換えることができる．M の点 p において，$\{e_1,\ldots,e_m\}$ を T_pM の基底，$\{e^1,\ldots,e^m\}$ をその双対基底とする．このとき点 p において，

$$d\eta = \sum_{j=1}^{m} e^j \wedge \nabla_{e_j}\eta$$

が成り立つ．

証明 (4.50) の両辺は $(t+1)$ 次テンソル場であるから，任意に固定した点 p において，$[X_i,X_j]_p = (\nabla_{X_i}X_j)_p = 0$ $(i,j=0,\ldots,t)$ として示せばよい．

このとき,

$$\begin{aligned} d\eta(X_0, \ldots, X_t)(p) &= \sum_{i=0}^{t}(-1)^i X_i(\eta(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_t))(p) \\ &= \sum_{i=0}^{t}(-1)^i (\nabla_{X_i}\eta)(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_t)(p) \\ &= \sum_{i=0}^{t}(-1)^i \sum_{j=1}^{m} e^j(X_i)(\nabla_{e_j}\eta)(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_t)(p) \\ &= \sum_{j=1}^{m}(e^j \wedge \nabla_{e_j}\eta)(X_0, \ldots, X_t)(p). \end{aligned}$$

ここで最初の等号において $[X_i, X_j]_p = 0$ を使い (練習問題 3.1 参照), 二番目の等号において $(\nabla_{X_i} X_j)_p = 0$ を使った. ∎

上の恒等式 (4.50) により, 微分形式に対して (4.49) の検証を繰り返すことにより, 次の恒等式が従う. $\omega \in A^{t+1}(M)$, $\eta \in A^t(M)$ に対して,

$$(\omega, d\eta)_g - (\delta\omega, \eta)_g = \operatorname{div} \widetilde{F}_{\omega,\eta}. \tag{4.51}$$

ただし, $\widetilde{F}_{\omega,\eta}(X) = (\iota_X\omega, \eta)_g$ $(X \in \mathcal{X}(M))$ とおいた (微分形式の内積の定義より, 先の $F_{\omega,\eta}$ と定数倍 $1/t!$ だけ異なる).

恒等式 (4.51) を積分して, 次の命題を得る.

命題 4.25 リーマン多様体 (M, g) 上の $(t+1)$ 次微分形式 ω と t 次微分形式 η に対して, コンパクトな滑らかな境界をもつ領域 A において, 次の恒等式が成り立つ:

$$\int_A (\omega, d\eta)_g - (\delta\omega, \eta)_g \, d\mu_g = \int_{bA} (\iota_\nu\omega, \eta)_h \, d\mu_h.$$

ここで ν は境界 bA の外向きの単位法ベクトル場を表し, h は bA 上の誘導計量を表す. また ω と η のどちらかの台がコンパクトならば,

$$\int_M (\delta\omega, \eta)_g \, d\mu_g = \int_M (\omega, d\eta)_g \, d\mu_g$$

が成り立つ.

このように δ は, $A^{t+1}(M)$ から $A^t(M)$ への 1 階の微分作用素であるが, 台がコンパクトである微分形式の空間に制限して考えると, δ が外微分作用素 d の (L^2 内積に関する) 形式的随伴作用素である.

練習問題 4.8　定理 3.8 (ストークスの定理) を証明せよ．(ヒント：m 次元多様体 M のリーマン計量 g を一つとり，m 次微分形式 $d\eta$ に対して，$d\eta = (d\eta, \omega_g)_g \omega_g$ と表す．さらに境界 ∂A の $(m-1)$ 次微分形式 $\iota^*\eta$ も，$\iota^*\eta = (\iota_\nu \omega_g, \iota^*\eta)_h \omega_h$ と表す．そして $\delta\omega_g = 0$ に注意して，命題 4.25 の恒等式を適用する．)

さて，リーマン多様体 (M, g) において，微分形式の空間 $A(M)$ に作用する**ラプラス作用素** Δ を次のように定義する:

$$\Delta = -(d\delta + \delta d).$$

($d\delta + \delta d$ によってラプラス作用素を定義する場合も多いので，符号に注意する必要がある．)

まず，ラプラス作用素の基本的性質 (i)–(iv) を述べる．

(i) Δ は t 次微分形式を t 次微分形式に移し，$\Delta = -(d+\delta)^2$ が成り立つ．

(ii) Δ は d および δ と可換である．すなわち $d\Delta = \Delta d$，$\delta\Delta = \Delta\delta$.

(iii) M がコンパクトのとき，

$$\int_M (\Delta\omega, \eta)_g \, d\mu_g = \int_M (\omega, \Delta\eta)_g \, d\mu_g \qquad (\omega,\ \eta \in A^t(M))$$

が成り立つ (このように Δ は L^2 内積に関して形式的自己共役作用素となる).

(iv) $d\omega = \delta\omega = 0$ と $(d+\delta)\omega = 0$ は同値な条件であり，これらを満たすならば，$\Delta\omega = 0$ である．$\Delta\omega = 0$ を満たす微分形式を**調和 (微分) 形式**という．M がコンパクトであれば，調和形式 ω は $d\omega = \delta\omega = 0$ を満たす．(実際，

$$\int_M (d\omega, d\omega)_g + (\delta\omega, \delta\omega)_g \, d\mu_g = -\int_M (\Delta\omega, \omega)_g \, d\mu_g = 0$$

より，$d\omega = 0$ かつ $\delta\omega = 0$ が従う．)

コンパクトリーマン多様体 (M, g) において，t 次調和形式全体のなすベクトル空間を $\mathcal{H}^t(M, g)$ と表す．これは，$Z^t(M)$ の部分空間である．また $B^t(M)$ と $\mathcal{H}^t(M, g)$，そして $Z^t(M)$ と $\delta(A^{t+1}(M))$ はそれぞれ L^2 内積に関して直交している．とくにドラームコホモロジー類 $\alpha \in H^t_{\mathrm{deR}}(M)$ が調和形式 ω_α を含むならば，それは一意的で，α を代表する元 ω のうち，L^2 ノルム $\|\omega\|_{L^2}$ を最小にする元である．逆にこのような元が存在すれば，それは調和形式である

ことをみるのはやさしい．ただし存在を示すには解析学の結果を必要とする．実際，**ホッジ・小平の定理**によれば，次の結果が成り立つ．

定理 4.26　コンパクト m 次元リーマン多様体 (M,g) において，各 $A^t(M)$ $(t=0,\ldots,m)$ は，次のように L^2 内積に関して直交分解する:

$$\begin{aligned} A^t(M) &= \mathcal{H}^t(M,g) + \Delta(A^t(M)) \\ &= \mathcal{H}^t(M,g) + d(A^{t-1}(M)) + \delta(A^{t+1}(M)). \end{aligned}$$

さらに $\mathcal{H}^t(M,g)$ の次元は有限である．

(この定理の証明については，たとえば [1] とその文献を参照してほしい．)

4.8.3　ワイツェンベックの公式とその応用

リーマン多様体 (M,g) 上の t 次微分形式 ω と二つのベクトル場 X,Y に対して，

$$R^t(X,Y)\omega = \nabla_X(\nabla_Y\omega) - \nabla_Y(\nabla_X\omega) - \nabla_{[X,Y]}\omega$$

とおくことによって，$\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times A^t(M)$ から $A^t(M)$ への各変数に対して線形な写像を得る．さらに定義から

$$\begin{aligned} R^t(fX,Y)\omega &= R^t(X,fY)\omega \\ &= R^t(X,Y)(f\omega) = fR^t(X,Y)\omega \qquad (f\in C^\infty(M)) \end{aligned}$$

が従う．よって $R^t(X,Y)\omega$ の点 p での値 ($\wedge^t(T_p^*M)$ の元) は，X,Y,ω それぞれの点 p での値によって決まる．ω のところにベクトル場をいれれば，g のリーマン曲率テンソル R の定義にほかならない．たとえば，$t=1$ のとき，

$$(R^1(X,Y)\omega)(Z) = -\omega(R(X,Y)Z) \qquad (X,Y,Z\in\mathcal{X}(M))$$

となる (3 章の例 9 参照)．

さらに，1 次微分形式 $\eta_1,\ldots,\eta_t$ に対して，

$$R^t(X,Y)(\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_t) = \sum_{i=1}^t \eta_1\wedge\cdots\wedge R^1(X,Y)\eta_i\wedge\cdots\wedge\eta_t$$

が成り立つ (定義 3.5 参照)．このように，R^t はリーマン曲率テンソル R から決まる．

さて M 上の t 次微分形式 ω に対して，t 次テンソル場 ρ_ω を次のように定義する．点 p での接ベクトル $v_1, \ldots, v_t$ に対して，

$$\rho_\omega(v_1, \ldots, v_t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t} (R^t(e_i, v_j)\omega)(v_1, \ldots, v_{j-1}, e_i, v_{j+1}, \ldots, v_t).$$

ここで $\{e_1, \ldots, e_m\}$ は T_pM の正規直交基底である．このとき，ρ_ω は正規直交基底のとり方によらない．検証は読者に任せる．たとえば，$t=1$ に対しては，

$$\begin{aligned}\rho_\omega(v) &= -\sum_{i=1}^{m} \omega(R(e_i, v)e_i) = -\sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, v)e_i, \omega^\sharp) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, v)\omega^\sharp, e_i) = \mathrm{Ric}(v, \omega^\sharp)\end{aligned}$$

となる．ただし，$\omega^\sharp$ は ω と計量 g に関して双対の関係にあるベクトル場を表し，$v = \omega^\sharp$ として，

$$(\omega, \rho_\omega)_g = \rho_\omega(\omega^\sharp) = \mathrm{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp)$$

が得られる．

以上の準備のもとに，**ワイツェンベックの公式**は次のように述べられる．

定理 4.27 リーマン多様体 (M, g) 上の微分形式 ω に対して，次の恒等式が成り立つ:

$$-\Delta\omega = -\mathrm{div}\,(\nabla\omega) + \rho_\omega, \tag{4.52}$$

$$(-\Delta\omega, \omega)_g = -\frac{1}{2}\Delta\|\omega\|_g{}^2 + \|\nabla\omega\|_g'{}^2 + (\rho_\omega, \omega)_g. \tag{4.53}$$

ただし，

$$\|\nabla\omega\|_g'{}^2(p) = \sum_{i=1}^{m} \|\nabla_{e_i}\omega\|_g{}^2(p) \qquad (p \in M)$$

とおいた．ここに $\{e_1, \ldots, e_m\}$ は T_pM の正規直交基底である．

この証明はあとにまわして，まず次の系を述べる．

系 4.28 1 次微分形式 ω に対して，

$$-\Delta\omega = -\mathrm{div}\,(\nabla\omega) + \mathrm{Ric}(\omega^\sharp, *),$$

$$(-\Delta\omega, \omega)_g = -\frac{1}{2}\Delta\|\omega\|_g{}^2 + \|\nabla\omega\|_g'{}^2 + \mathrm{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) \tag{4.54}$$

が成り立つ．ただし，$\|\nabla\omega\|_g'^2 = \langle\nabla\omega, \nabla\omega\rangle_g$ である．とくに $\omega = df$ ならば，

$$(-d\Delta f, df)_g = (-\Delta df, df)_g$$
$$= -\frac{1}{2}\Delta\|df\|_g^2 + \|\nabla df\|_g'^2 + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)$$

が成り立つ．

次にこの結果の応用を二つとり上げる．まず，**ボホナーの定理**を示そう．

定理 4.29　(M, g) を m 次元コンパクト連結リーマン多様体とし，そのリッチ曲率はいたるところ正または 0 であるとする．このとき 1 次調和形式は平行である．とくに，1 次ドラームコホモロジー群 $H^1_{\mathrm{deR}}(M)$ の次元 r は，M の次元 m をこえることはない．さらに，リッチ曲率があるところで正となるならば，1 次調和形式は自明となり，$H^1_{\mathrm{deR}}(M) = \{0\}$ である．

証明　1 次微分形式 ω に対して (4.54) を適用し，その両辺を M 上積分することによって，

$$\int_M \|\nabla\omega\|_g'^2 + \mathrm{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp)\, d\mu_g = \int_M (-\Delta\omega, \omega)_g\, d\mu_g$$
$$= \int_M \|d\omega\|_g^2 + \|\delta\omega\|_g^2\, d\mu_g$$

となる．ここで (M, g) のリッチ曲率がいたるところ正または 0 であるから，ω が調和形式ならば，平行であり ($\nabla\omega = 0$)，さらに $\mathrm{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) = 0$ でなければならない．このことから，$\mathcal{H}^1(M, g)$ の次元 r は M の次元 m 以下であることがわかり，残りの主張も明らかである．■

この定理において $r = m$ となる場合を，定理 3.10 の証明の後の議論を参考にして考察してほしい．

さて，コンパクト連結リーマン多様体 (M, g) 上の関数に作用するラプラス作用素 Δ を考える．$\Delta f + \lambda f = 0$ を満たす自明でない関数 f が存在するとき，λ を Δ の**固有値**，f をその**固有関数**という．たとえば，定曲率 $k\,(> 0)$ の m 次元球面 $\mathbf{S}^m(1/\sqrt{k})$ ($\subset \mathbf{R}^{m+1}$) の場合，mk は固有値である (例 2 参照)．また，n 次元リーマン多様体 (M, g) から球面 $\mathbf{S}^m(1/\sqrt{k})$ への極小等長はめ込み $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^{m+1})$ を考えると，ϕ の各成分 ϕ_i は $\Delta\phi^i = -kn\phi^i$ を満たし，

M の固有値 kn の固有関数である (例 3 参照). 一般に, (4.48) において定義した $\lambda_1(M)$ は, Δ の 0 でない最初の固有値 (第一固有値) である. すなわち, (4.48) の下限を実現する C^∞ 級関数 f が存在して, $\Delta f + \lambda_1(M)f = 0$ を満たすことが知られている. (4.54) の応用として, この固有値に関する**リヒネロビッツ・小畠の定理**を示したい.

定理 4.30 m 次元コンパクト連結リーマン多様体 (M, g) のリッチ曲率が正の定数 $(m-1)k$ 以上であるとする. このとき, 関数に作用するラプラス作用素の第一固有値 $\lambda_1(M)$ は, $\lambda_1(M) \geqq mk$ を満たす. さらに等号が成り立つのは, M が定曲率 k の m 次元球面 $\mathbf{S}^m(1/\sqrt{k})$ に等長であるとき, かつそのときに限る.

証明 まず任意の $u \in C^\infty(M)$ に対して, (4.54) より,

$$\begin{aligned}\int_M (\Delta u)^2\, d\mu_g &= \int_M (\delta du)^2\, d\mu_g \\ &= \int_M (-\Delta du, du)_g\, d\mu_g \\ &= \int_M \left\|\nabla du\right\|_g'^{\,2} + \mathrm{Ric}(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u)\, d\mu_g\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで u のヘッシアンの固有値を $\mu_1, \dots, \mu_m$ とすれば, コーシー・シュワルツの不等式より, $(\mu_1 + \cdots + \mu_m)^2 \leqq m(\mu_1^2 + \cdots + \mu_m^2)$ となり, したがって, $(\Delta u)^2 \leqq m\left\|\nabla du\right\|_g'^{\,2}$ である. これを上式に代入して整理すると, 次の不等式が得られる:

$$\int_M (\Delta u)^2\, d\mu_g \geqq \frac{m}{m-1}\int_M \mathrm{Ric}(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u)\, d\mu_g.$$

これを固有値 λ の固有関数 f に適用すると, リッチ曲率の仮定から

$$\begin{aligned}\lambda \int_M \|\operatorname{grad} f\|^2\, d\mu_g &= -\lambda \int_M f\Delta f\, d\mu_g \\ &= \int_M (\Delta f)^2\, d\mu_g \\ &\geqq mk \int_M \|\operatorname{grad} f\|^2\, d\mu_g\end{aligned}$$

となる. これから $\lambda \geqq mk$ が従う.

さらに $\lambda = mk$ とすると, M の各点において $(\Delta f)^2 = m\left\|\nabla df\right\|_g'^{\,2}$ が成り立つ. これはある関数 μ があって, $\nabla df = \mu g$ となることと同値であり, $\Delta f + \lambda f = 0$ より, $\mu = -kf$ となる. すなわち f は $\nabla df + kfg = 0$ を満たす. ここで p と q をそれぞれ

f が最大値と最小値をとる点とし，$c(t)$ $(0 \leqq t \leqq \ell = d_g(p,q))$ を p と q を結ぶ最短測地線とする．リッチ曲率の仮定から ℓ は最大直径 $\pi/\sqrt{k}$ をこえない．f を $c(t)$ に制限して得られる関数 $h(t) = f(c(t))$ を考えると，$h'' + kh = 0$，$h'(0) = h'(\ell) = 0$ を満たす．このことから，ある定数 a があって，$h(t) = a\cos\sqrt{k}t$ かつ $\ell = \pi/\sqrt{k}$ であることがわかる．ただし a は定数．したがって，最大直径定理 (定理 4.14 (1) 参照) より M は球面 $\mathbf{M}_k$ に等長であることが従う．また $r_p = d_g(p,*)$ とおいて，$f = a\cos\sqrt{k}r_p$ となる． □

定理 4.27 の証明　まず補題 4.24 より，次のことが成り立つことに注意する．ベクトル場 $U, V_1, \ldots, V_t$ に対して，

$$\begin{aligned}(\nabla\omega - d\omega)(U, V_1, \ldots, V_t) &= (\nabla_U\omega)(V_1, \ldots, V_t) - d\omega(U, V_1, \ldots, V_t)\\ &= \sum_{j=1}^{t}(\nabla_{V_j}\omega)(V_1, \ldots, V_{j-1}, U, V_{j+1}, \ldots, V_t).\end{aligned}$$

次に M の点 p を固定して，$(E_1, \ldots, E_m)$ を p の近傍で定義された正規直交標構場とする．$e_i = (E_i)_p$ とおいて，$\nabla_{e_i}E_j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ を満たしているとする．ここで $v_1, \ldots, v_t$ $(\in T_pM)$ に対して，

$$(V_k)_p = v_k, \quad \nabla_{e_i}V_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m\,;\, k = 1, \ldots, t)$$

を満たす p の近傍で定義されているベクトル場 V_k をとる (命題 3.16 参照)．このとき，

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\nabla\omega + \delta d\omega)(v_1, \ldots, v_t) &= \operatorname{div}(\nabla\omega - d\omega)(v_1, \ldots, v_t)\\ &= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}(\nabla\omega - d\omega))(e_i, v_1, \ldots, v_t)\\ &= \sum_{i=1}^{m} e_i((\nabla\omega - d\omega)(E_i, V_1, \ldots, V_t))\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{t} e_i((\nabla_{V_k}\omega)(V_1, \ldots, V_{k-1}, E_i, V_{k+1}, \ldots, V_t))\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{t}(\nabla_{e_i}(\nabla_{V_k}\omega))(v_1, \ldots, v_{k-1}, e_i, v_{k+1}, \ldots, v_t).\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}d\delta\omega(v_1, \ldots, v_t) &= \sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}(\nabla_{v_k}\delta\omega)(v_1, \ldots, \widehat{v_k}, \ldots, v_t)\\ &= \sum_{k=1}^{t}(-1)^k v_k\left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{E_i}\omega)(E_i, V_1, \ldots, \widehat{V_k}, \ldots, V_t)\right)\\ &= -\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{m}\left(\nabla_{v_k}(\nabla_{E_i}\omega)\right)(v_1, \ldots, v_{k-1}, e_i, v_{k+1}, \ldots, v_t),\end{aligned}$$

したがって，$[E_i, V_k]_p = (\nabla_{E_i}V_k - \nabla_{V_k}E_i)_p = 0$ に注意すると，

$$(-\Delta\omega + \operatorname{div}\nabla\omega)(v_1, \ldots, v_t) = \rho_\omega(v_1, \ldots, v_t).$$

以上で (4.52) が示された．続けて，

$$(\mathrm{div}\,\nabla\omega)(v_1,\dots,v_t)=\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}(\nabla\omega))(e_i,v_1,\dots,v_t)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}e_i((\nabla_{E_i}\omega)(V_1,\dots,V_t))$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}(\nabla_{E_i}\omega))(v_1,\dots,v_t),$$

したがって

$$(-\mathrm{div}\,\nabla\omega,\omega)_g(p)=-\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}(\nabla_{E_i}\omega),\omega)_g$$
$$=-\sum_{i=1}^{m}(e_i(\nabla_{E_i}\omega,\omega)_g-(\nabla_{e_i}\omega,\nabla_{e_i}\omega)_g)$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}e_i(E_i(\|\omega\|_g{}^2))+\|\nabla\omega\|_g'{}^2(p)$$
$$=-\frac{1}{2}\Delta\|\omega\|_g{}^2(p)+\|\nabla\omega\|_g'{}^2(p)$$

となる．以上から恒等式 (4.53) が従う．∎

練習問題 4.9　m 次元リーマン多様体 (M,g) の t 次微分形式 ω に対して，$(0,2)$ 次テンソル場 S_ω を

$$S_\omega(X,Y)=\frac{1}{2}\|\omega\|_g{}^2g(X,Y)-(\iota_X\omega,\iota_Y\omega)_g\qquad(X,Y\in\mathcal{X}(M))$$

によって定義する．このとき以下の (1)〜(6) に述べられていることを示せ．

(1) $(\mathrm{div}\,S_\omega)(X)=(\iota_X(d\omega),\omega)_g+(\iota_X\omega,\delta\omega)_g\quad(X\in\mathcal{X}(M))$

(2) $\mathrm{div}(\iota_XS_\omega)=(\mathrm{div}\,S_\omega)(X)+\dfrac{1}{2}\|\omega\|_g{}^2\mathrm{div}\,X-(\omega^{\nabla X},\omega)_g\quad(X\in\mathcal{X}(M))$

したがって，ω (あるいはベクトル場 X) の台がコンパクトであれば，次が成り立つ:

$$\int_M\left\{(\iota_X(d\omega),\omega)_g+(\iota_X\omega,\delta\omega)_g+\frac{1}{2}\|\omega\|_g{}^2\mathrm{div}\,X-(\omega^{\nabla X},\omega)_g\right\}d\mu_g=0.$$

ここで

$$\omega^{\nabla X}(Y_1,\dots,Y_t)=\omega(\nabla_{Y_1}X,Y_2,\dots,Y_t)+\cdots+\omega(Y_1,\dots,Y_{t-1},\nabla_{Y_t}X)$$

とおいた ($t=0$，すなわち ω が関数のときは $\omega^{\nabla X}=0$ と理解する)．

以下 $X=\mathrm{grad}\,f$ $(f\in C^\infty(M))$ とする．

(3) $(\omega^{\nabla\mathrm{grad}\,f},\omega)_g(p)=\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_t}(\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_t})\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_t})^2\quad(p\in M)$

ここで $\{\lambda_i\mid\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_m\}$ は f のヘッシアン ∇df の点 p での固有値とし，$\{e_1,\dots,e_m\}$ はそれに対応する固有ベクトルからなる T_pM の正規直交基底である．さ

らに

$$\delta_f(p) = \frac{1}{2}\bigl(\lambda_{t+1} + \cdots + \lambda_m - \lambda_1 - \cdots - \lambda_t\bigr)$$

とおくと，

$$\frac{1}{2}\|\omega\|_g{}^2 \Delta f - (\omega^{\nabla \operatorname{grad} f}, \omega)_g \geqq \delta_f \|\omega\|_g{}^2$$

となる．

(4) ある正の定数 c_1, c_2 があって，$\|\operatorname{grad} f\| \leqq c_1$, $\delta_f \geqq c_2$ が成り立つとき，台がコンパクトな t 次微分形式 ω すべてに対して，

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \int_M \|\omega\|_g{}^2 \, d\mu_g \leqq \int_M \|d\omega\|_g{}^2 + \|\delta\omega\|_g{}^2 \, d\mu_g$$

が成り立つ．

以下 (M,g) は完備単連結リーマン多様体とし，断面曲率 K はいたるところ -1 以下であるとする．

(5) 台がコンパクトな C^∞ 級関数 u に対して，

$$\frac{(m-1)^2}{4} \int_M u^2 \, d\mu_g \leqq \int_M \|du\|_g{}^2 \, d\mu_g$$

が成り立つ．

(6) さらに $t < (m-1)/2$ を満たす t と $1 \leqq a < (m-1-t)/t$ を満たす定数 a に対して， $K \geqq -a^2$ とする．このとき台がコンパクトな t 次微分形式 ω すべてに対して，

$$\frac{(m-1-t-at)^2}{4} \int_M \|\omega\|_g{}^2 \, d\mu_g \leqq \int_M \|d\omega\|_g{}^2 + \|\delta\omega\|_g{}^2 \, d\mu_g$$

が成り立つ．

(ヒント：(5) を示すために，M の点 p からの距離関数 r を考える．アダマール・カルタンの定理 (定理 4.3) より，r は $M \setminus \{p\}$ において C^∞ 級で，$\|\operatorname{grad} r\| = 1$．さらに定理 4.16 より，そのヘッシアン ∇dr は下から $(\cosh r/\sinh r)(g - dr \otimes dr)$ で押さえられることに注意する．それから (6) に関しては，その断面曲率の仮定から定理 4.16 を使い，∇dr が上から $(a\cosh ar/\sinh ar)(g - dr \otimes dr)$ で押さえられていることに注意する．これから δ_r を下から評価して問 (4) を使う．ただし r は点 p では滑らかではないが，発散公式の適用するときに注意して，(4) の評価式がそのまま成り立つことを確かめる．)

参 考 文 献

次の [1]～[8] は本文において引用したものである．その他本書の執筆にあたっておもに参考にした書物やさらに勉強されたい人のための参考書をいくつかあげる．

[1] 北原晴夫・河上肇：調和積分論 (現代数学ゼミナール 14)，近代科学社，1991

[2] 前田吉昭：多様体入門 —— 幾何学を考える出発点 —— (数学レクチャーノート [基礎編])，培風館 (近刊).

[3] 松本幸夫：多様体の基礎 (基礎数学 5)，東京大学出版会，1988.

[4] 松島与三：多様体入門，裳華房，1965.

[5] 村上信吾：多様体 (共立数学講座 19)，共立出版，1989 (第 2 版).

[6] 村上信吾：幾何学概論 (数学選書 7)，裳華房，1984.

[7] 落合卓四郎：微分幾何学入門 上，下 (基礎数学 9，10) 東京大学出版会，1991，1993.

[8] 酒井 隆：リーマン幾何学 (数学選書 11)，裳華房，1992.

[9] 剱持勝衛：曲面論講義——平均曲率一定曲面入門——，培風館，2000.

[10] 西川青季：幾何学的変分問題 (現代数学の基礎 28)，岩波書店，1997.

[11] ヒルデブラント・トロンバ (小川泰・神志那良雄・平田隆幸訳)：形の法則 —— 自然界の形とパターン —— ，東京化学同人，1994.

[12] 浦川 肇：ラプラス作用素とネットワーク，裳華房，1996.

[13] M. P. do Carmo: Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992.

[14] S.Gallot, D.Hullin and J.Lafontaine: Riemannian Geometry, Springer-Verlag, 1987.

[15] G.L. Naber: Topology, Geometry, and Gauge Fields Foundations (Texts in Applied Math. 25), Springer-Verlag, 1997.

[16] M.E. Taylor: Partial Differential Equations II (Applied Math. Sci. 116), Springer-Verlag, 1996.

索　　引

欧文索引

和 文 索 引

あ　行

か　行

さ 行

た　行

ま　行

や　行

ら　行

著者略歴

加須栄 篤（かすえ あつし）

1980年 大阪大学大学院理学研究科博士前期課程修了
1982年 東京大学大学院理学系研究科博士後期課程中途退学
大阪大学助手，講師，助教授，大阪市立大学教授を経て
現在 金沢大学教授（理学博士）

2001年6月29日 初版発行

数学レクチャーノート［基礎編2］
リーマン幾何学

著者 加須栄篤
発行者 山本 格
発行所 株式会社 培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03) 3262-5256 (代表)・振替 00140-7-44725

D.T.P. アベリー・平文社印刷・坂本製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-00646-7 C3341